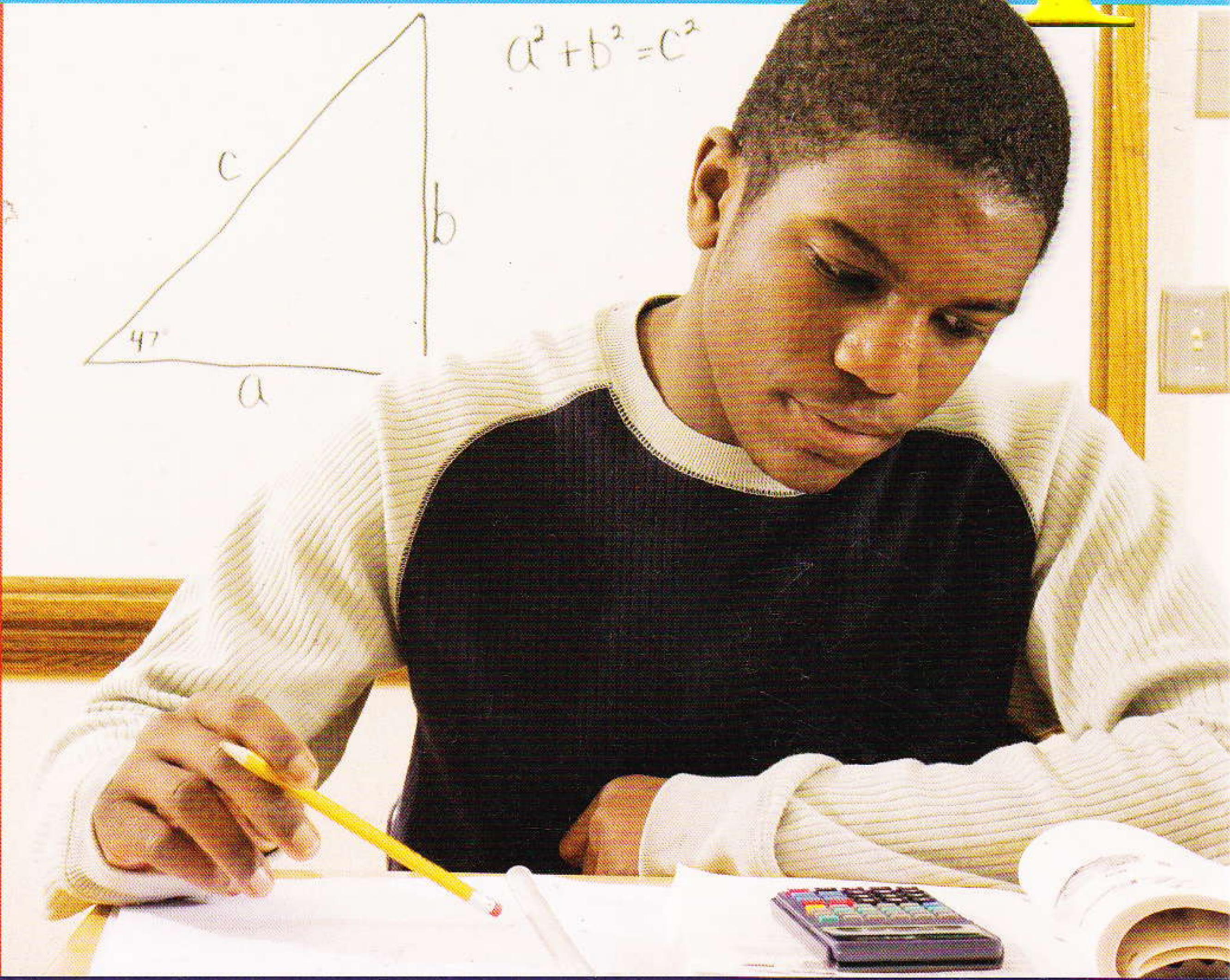
NOVO CURRÍCULO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA 11

PRÉ-UNIVERSITÁRIO

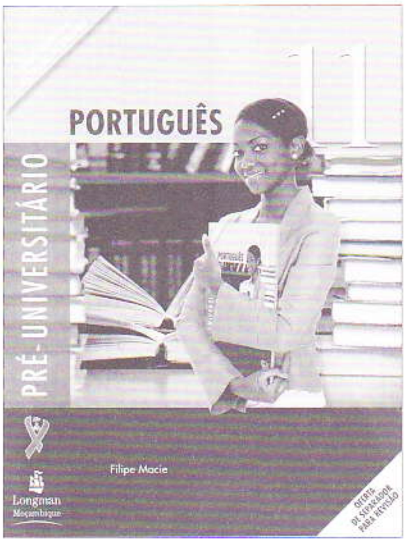


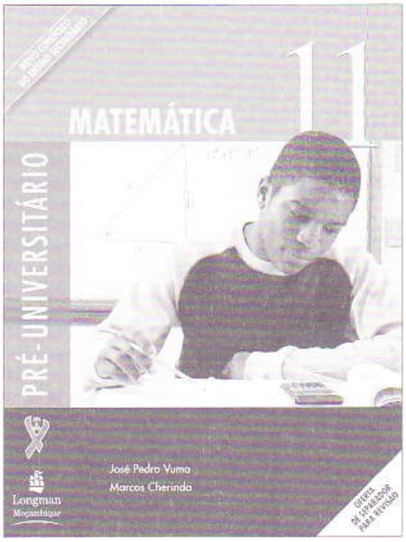
José Pedro Vuma
Marcos Cherinda

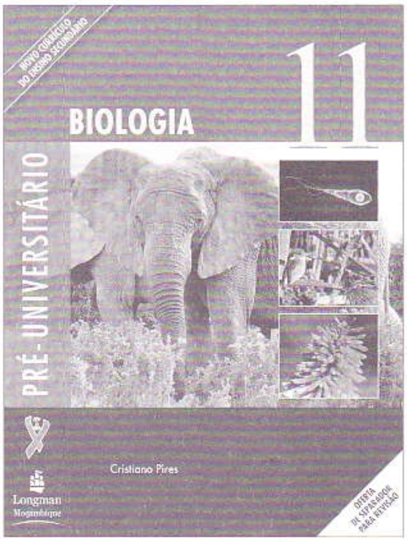
Longman Moçambique

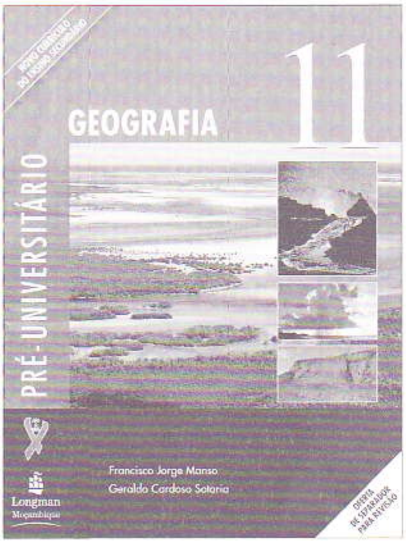
OFERTA DE SEPARADOR PARA REVISÃO

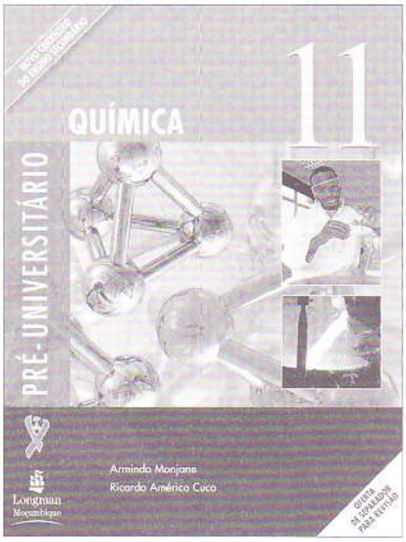
Títulos disponíveis para a 11.ª Classe

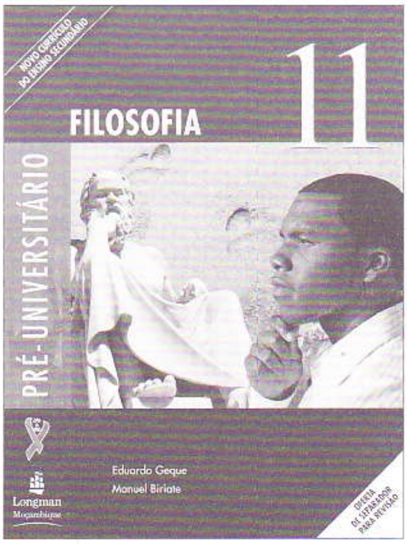


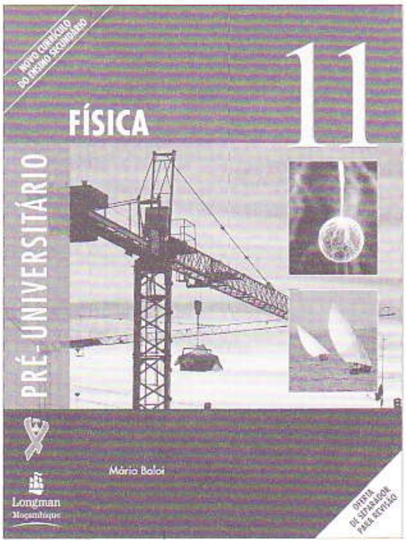


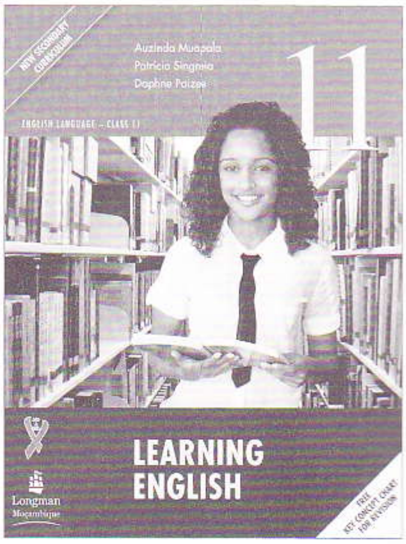






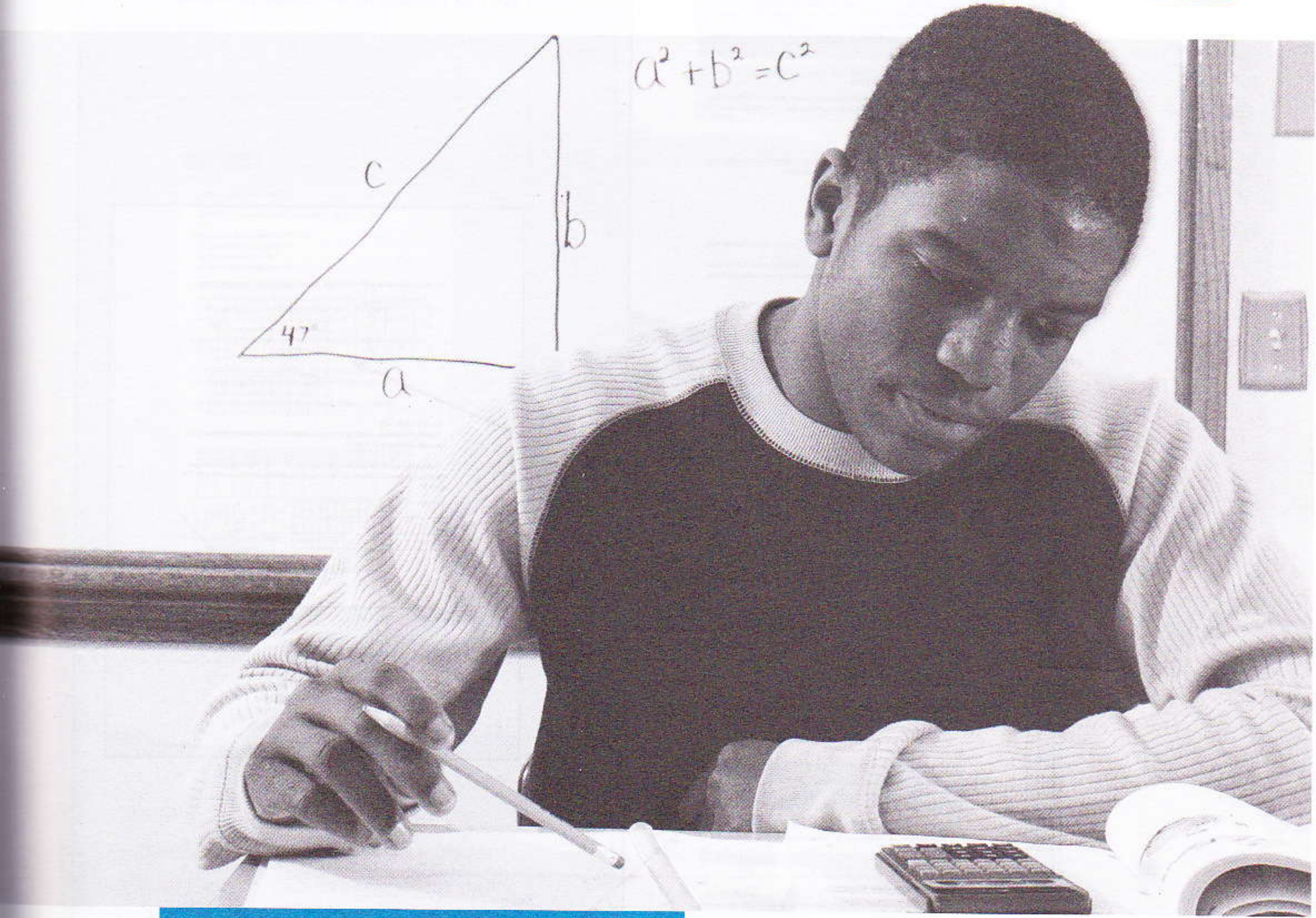






José Pedro Vuma
Marcos Cherinda

MATEMÁTICA 11

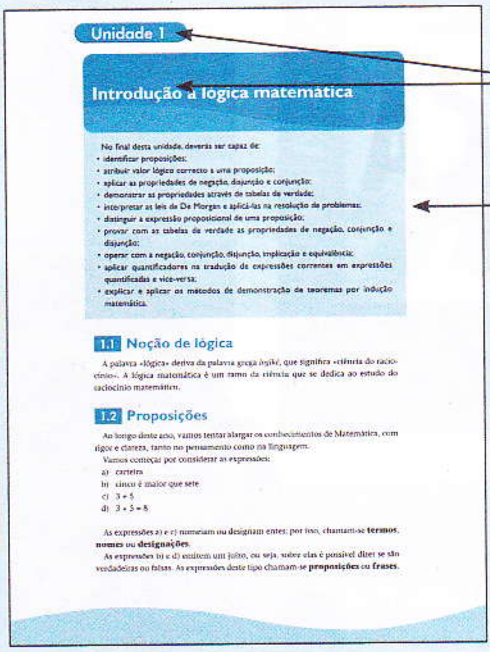


PRÉ-UNIVERSITÁRIO

Longman
Moçambique

Estrutura do Livro

Apresentamos agora as principais características deste manual, para que seja mais fácil utilizá-lo no trabalho diário, quer na escola, quer no estudo feito em casa.


Unidade 1

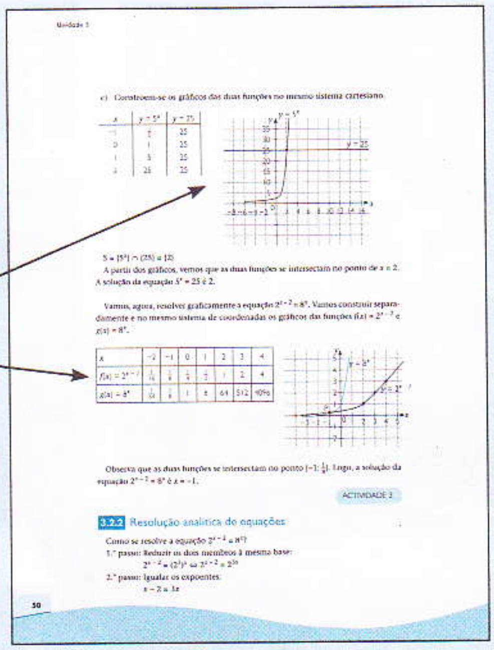
Introdução à lógica matemática

1.1 Noção de lógica

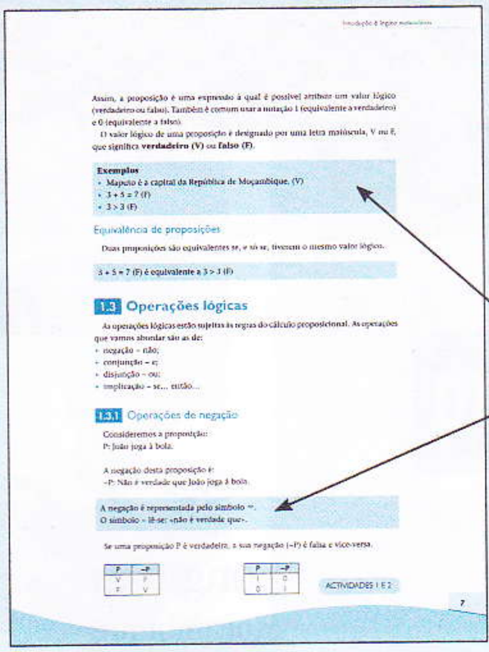
1.2 Proposições

Indicação da unidade e do tema.

Indicação dos objectivos da unidade, para ajudar a medir o sucesso do trabalho realizado em cada unidade.

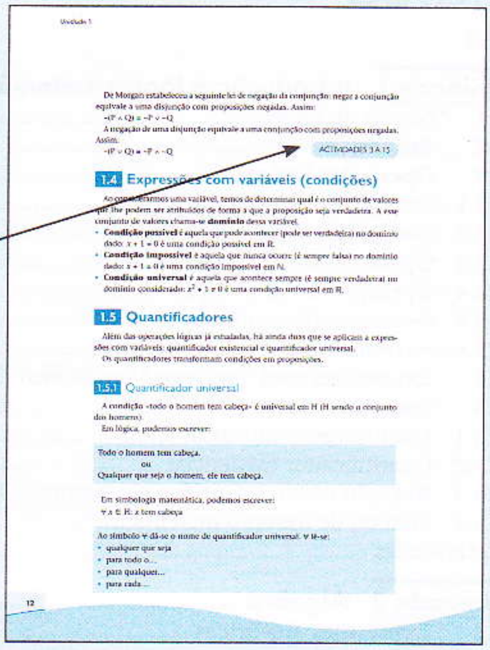

3.2.2 Resolução analítica de equações

Textos explicativos, apoiados por imagens/ desenhos/tabelas.

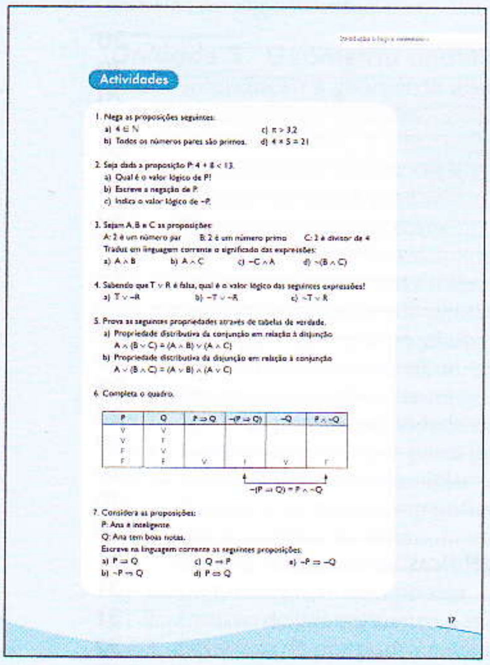

1.3 Operações lógicas

1.3.1 Operações de negação

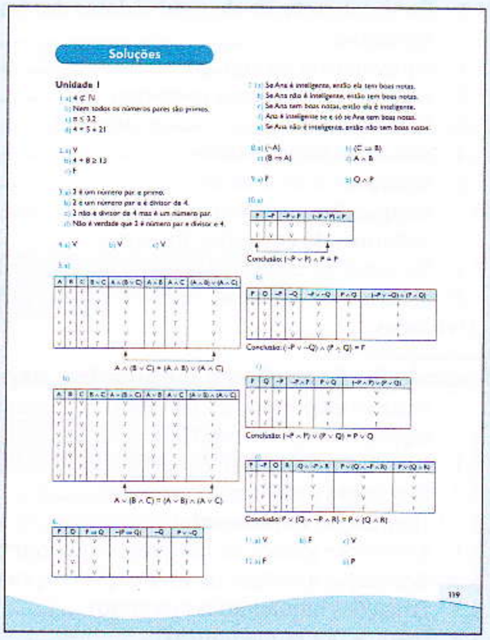
Exemplos e conceitos destacados, com um fundo de cor, para ajudar à compreensão da matéria.



Indicação das actividades que devem ser realizadas à medida que vão sendo trabalhados os conteúdos de cada uma das unidades.



Actividades no final das unidades: um conjunto de exercícios que se destinam a colocar em prática os conhecimentos aprendidos.



No final do manual apresentam-se as soluções das actividades, para se poder verificar a correcção das respostas dadas.

Este manual é acompanhado por um prático separador, com informação muito útil.

Índice

Pág.

Unidade 1

Introdução à lógica matemática

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar proposições;
- atribuir valor lógico correcto a uma proposição;
- aplicar as propriedades de negação, disjunção e conjunção;
- demonstrar as propriedades através de tabelas de verdade;
- interpretar as leis de De Morgan e aplicá-las na resolução de problemas;
- distinguir a expressão proposicional de uma proposição;
- provar com as tabelas de verdade as propriedades de negação, conjunção e disjunção;
- operar com a negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência;
- aplicar quantificadores na tradução de expressões correntes em expressões quantificadas e vice-versa;
- explicar e aplicar os métodos de demonstração de teoremas por indução matemática.

1.1 Noção de lógica

A palavra «lógica» deriva da palavra grega *logiké*, que significa «ciência do raciocínio». A lógica matemática é um ramo da ciência que se dedica ao estudo do raciocínio matemático.

1.2 Proposições

Ao longo deste ano, vamos tentar alargar os conhecimentos de Matemática, com rigor e clareza, tanto no pensamento como na linguagem.

Vamos começar por considerar as expressões:

a) carteira

b) cinco é maior que sete

c) $3 + 5$

d) $3 + 5 = 8$

As expressões a) e c) nomeiam ou designam entes; por isso, chamam-se **termos**, **nomes** ou **designações**.

As expressões b) e d) emitem um juízo, ou seja, sobre elas é possível dizer se são verdadeiras ou falsas. As expressões deste tipo chamam-se **proposições** ou **frases**.

1.3.2 Operações de conjunção

Consideremos a proposição:
T: Aníbal pratica futebol e Rosa pratica natação.

Esta proposição resulta da ligação das proposições elementares:
P: Aníbal pratica futebol.
Q: Rosa pratica natação.
A proposição T diz-se conjunção de P e Q.

A conjunção representa-se pelo símbolo $\wedge$.
O símbolo $\wedge$ lê-se «e».

Assim, a conjunção de duas proposições P e Q é uma nova proposição $(P \wedge Q)$ que só é verdadeira quando as duas proposições forem verdadeiras.

P	Q	$P \wedge Q$
V	F	F
V	V	V
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
1	0	0
1	1	1
0	1	0
0	0	0

Propriedades da conjunção

A conjunção tem as seguintes propriedades: a comutativa, a associativa e a da idempotência.

Propriedade comutativa

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$A \wedge B = B \wedge A$

Propriedade associativa

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Observa:

$A \wedge V = A$: O valor lógico V é o elemento neutro na conjunção.

$A \wedge F = F$: O valor lógico F é o elemento absorvente na conjunção.

$A \wedge A = A$: É a propriedade de idempotência.

1.3.3 Operações de disjunção

Consideremos a proposição:

M: Aníbal pratica futebol ou pratica natação.

Esta proposição resulta da ligação das proposições elementares:

P: Aníbal pratica futebol.

Q: Aníbal pratica natação.

A proposição M diz-se disjunção inclusiva de P e Q porque o Aníbal pratica uma das modalidades ou ambas.

A disjunção representa-se pelo símbolo $\vee$.
O símbolo $\vee$ lê-se «ou».

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A disjunção de duas proposições, P e Q, dá origem a uma nova proposição $P \vee Q$, que só é falsa se ambas as proposições forem falsas.

Propriedades da disjunção

A disjunção tem as seguintes propriedades: a comutativa, a associativa e a da idempotência.

Propriedade comutativa
$A \vee B = B \vee A$

Propriedade associativa
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

F é o elemento neutro na disjunção: $A \vee F = A$
V é o elemento absorvente na disjunção: $A \vee V = V$
$A \vee A = A$: É a propriedade da idempotência.

1.3.4 Operações de implicação

Consideremos a proposição:
T: Se João fizer os TPC, então ele terá boas notas.
Esta proposição é a ligação de duas proposições:
P: João faz os TPC.
Q: João tem boas notas.

A proposição «se P então Q» chama-se **implicação**. Simbolicamente representa-se assim:

$$\underset{\text{antecedente}}{P} \Rightarrow \underset{\text{consequente}}{Q}$$

P	Q	P ⇒ Q
V	F	F
V	V	V
F	V	V
F	F	V

A implicação de duas proposições, P e Q, é a proposição $P \Rightarrow Q$, que só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente falso.

Observa com atenção o quadro seguinte.

P	Q	P ⇒ Q	~P	~P ∨ Q
V	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V

$P \Rightarrow Q = \sim P \vee Q$

Nota: A implicação pode ser transformada numa disjunção.

Observa os exemplos.
Se Tico-Tico é avançado, então marca golos ($P \Rightarrow Q$).

Esta proposição é equivalente.
O Tico-Tico não é avançado ou marca golos ($\sim P \vee Q$).

Atenta agora neste segundo quadro.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim(P \Rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

$\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q$

Nota: A negação da implicação equivale à conjunção do antecedente com a negação do consequente.

Então, usando a igualdade $P \Rightarrow Q = \sim P \vee Q$, temos:
$\sim(P \Rightarrow Q) = \sim(\sim P \vee Q)$
$\sim(P \Rightarrow Q) = \sim\sim P \wedge \sim Q$
$\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q$

1.3.5 Operações de equivalência

Consideremos as proposições P e Q. A operação lógica da dupla implicação é traduzida por $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ ou, simplesmente, $P \Leftrightarrow Q$, que se lê «se e só se».

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A equivalência de duas proposições só é verdadeira se ambas as proposições tiverem o mesmo valor lógico.

1.3.6 As primeiras leis de De Morgan

As leis de De Morgan são da autoria do matemático inglês Augustus de Morgan (1801-1871) e podem ser separadas em Primeiras Leis de Morgan e Segundas Leis de Morgan.

De Morgan estabeleceu a seguinte lei de negação da conjunção: negar a conjunção equivale a uma disjunção com proposições negadas. Assim:

$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$

A negação de uma disjunção equivale a uma conjunção com proposições negadas. Assim:

$\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$

ACTIVIDADES 3 A 15

1.4 Expressões com variáveis (condições)

Ao considerarmos uma variável, temos de determinar qual é o conjunto de valores que lhe podem ser atribuídos de forma a que a proposição seja verdadeira. A esse conjunto de valores chama-se **domínio** dessa variável.

- **Condição possível** é aquela que pode acontecer (pode ser verdadeira) no domínio dado: $x + 1 = 0$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$.
- **Condição impossível** é aquela que nunca ocorre (é sempre falsa) no domínio dado: $x + 1 = 0$ é uma condição impossível em $\mathbb{N}$.
- **Condição universal** é aquela que acontece sempre (é sempre verdadeira) no domínio considerado: $x^2 + 1 \neq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

1.5 Quantificadores

Além das operações lógicas já estudadas, há ainda duas que se aplicam a expressões com variáveis: quantificador existencial e quantificador universal.

Os quantificadores transformam condições em proposições.

1.5.1 Quantificador universal

A condição «todo o homem tem cabeça» é universal em H (H sendo o conjunto dos homens).

Em lógica, podemos escrever:

Todo o homem tem cabeça.

ou

Qualquer que seja o homem, ele tem cabeça.

Em simbologia matemática, podemos escrever:

$\forall\, x \in H$: x tem cabeça

Ao símbolo $\forall$ dá-se o nome de quantificador universal. $\forall$ lê-se:

- qualquer que seja
- para todo o...
- para qualquer...
- para cada...

Exemplos
Qual é o valor lógico das proposições seguintes?
$\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + n \geq n^2$ (V)
$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x > x^2$ (F), porque, se $x = -1$, $1 - 1 > 1$, isto é, $0 > 1$ é falso.
$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ (V)

1.5.2 Quantificador existencial

Ao símbolo $\exists$ dá-se o nome de quantificador existencial. $\exists$ lê-se «existe pelo menos um».

O quantificador existencial transforma uma condição possível numa proposição verdadeira.

Exemplos
$2x - 1 = 0$, condição possível em $\mathbb{R}$
$\exists x \in \mathbb{R}: 2x - 1 = 0$, proposição verdadeira
$x^2 + 1 = 0$, condição impossível em $\mathbb{R}$
$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$, proposição falsa

ACTIVIDADES 16 A 21

1.5.3 Negação de um quantificador (segundas leis de De Morgan)

Negar que uma condição é universal não significa, necessariamente, dizer que é impossível. Negar que uma condição é universal equivale a afirmar que **nem todos** os elementos a verificam, isto é, que há pelo menos um que não a verifica.

Observa o exemplo:
Todos os alunos da turma gostam de marrabenta.
Negação: Nem todos os alunos da turma gostam de marrabenta.
Isto significa que há, pelo menos, um aluno que não gosta de marrabenta.

Simbolicamente, escreve-se:
$\sim(\forall x) = \exists \sim x$

A negação transforma o quantificador universal no quantificador existencial seguido da negação.

Vejamos mais um exemplo:

Existe pelo menos um aluno na turma que não gosta dos Mambas.

Negação: Todos os alunos da turma gostam dos Mambas.

$\sim(\exists\, x) = \forall \sim x.$

A negação transforma o quantificador existencial no quantificador universal seguido da negação.

Exemplos

P: $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x - 2 = 5$ (F)

~P: $\exists\, x \in \mathbb{R}$: $x - 2 \neq 5$ (V)

Q: $\exists\, x \in \mathbb{N}$: $n < 1 + n$ (V)

~Q: $\forall\, x \in \mathbb{N}$: $n \geq 1 + n$ (F)

1.5.4 Método de indução matemática

O método de indução matemática é um método para demonstrar proposições sobre os números naturais.

Uma proposição P(n) sobre os números naturais é válida para todos os números naturais se são cumpridas as duas propriedades seguintes:

a) P(n) é verdadeira para $n = 0$ (começo da indução);

b) Da validade de P(n) para $n = k$ segue sempre a validade de P(n) para $n = k + 1$ (passos da indução).

Para demonstrar P(n), devemos tentar demonstrar as propriedades a) e b). Se a) e b) são cumpridas, então a proposição é válida para todos os números naturais.

Exemplo 1

Demonstrar que a soma de todos os números naturais de 0 até n é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vamos provar que:

$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Observa:

Para $n = 2$; $0 + 1 + 2 = 2\,\frac{(2+1)}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

Para $n = 4$; $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10$

Para $n = 5$; $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} = 5 \cdot \frac{6}{2} = 15$

Vimos que a fórmula é válida para $n = 2$, 4 e 5. Agora, queremos provar que esta fórmula é válida para qualquer n por indução matemática.

Demonstração

Para $n = 0$

$0 = \frac{0(0+1)}{2}$

$= 0$, a fórmula é válida para $n = 0$.

Para $n = k$

Vamos provar que a fórmula é válida para $n = k$, isto é:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Vamos provar que a fórmula é válida também para $n = k + 1$:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1)]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ (por provar)}$$

Já vimos que $0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Vamos adicionar a ambos os membros desta equação o número $k + 1$.

$$\underbrace{0 + 1 + 2 + \ldots + k + (k+1)} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

Vamos factorizar $k^2 + 3k + 2 = (k+2)(k+1)$.

Logo, teremos

$$0 + 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que é exactamente o que queríamos provar.

Concluímos que a fórmula é válida para todos os números naturais.

Exemplo 2

Aplicando o método de indução matemática, vamos demonstrar que $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m, \forall\, m \in \mathbb{N}$

Demonstração:

Vamos demonstrar a propriedade fazendo uma indução sobre m.

Seja $m = 0$

$a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$ – propriedade é válida para $n = 0$

A propriedade dada é válida para $m = k$;
$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$

Vamos, agora, provar que é válida para $m = k + 1$.
Na igualdade $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$, vamos multiplicar os dois membros por $(a \cdot b)$

$$a^k \cdot b^k \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1$$
$$(a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = (a \cdot b)^{k+1}$$
$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a\ .\ b)^{k+1}$$

Concluímos que a fórmula $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ é válida para qualquer número natural.

Exemplo 3
Vamos provar que, para qualquer número natural m, n e p, com $p \neq 0$, se $m = 0$ ou $n = 0$, $0 < m \leq n \Rightarrow m^p \leq n^p$

Demonstração
Vamos demonstrar por indução sobre p.

1. Para $p = 0$
   $m \leq n \Rightarrow m^0 \leq n^0$
   $1 = 1$ a propriedade é válida
2. Se a propriedade é válida para $p = k$, isto é, $m \leq n \Rightarrow m^k \leq n^k$, será também válida para $p = k + 1$?
   A desigualdade $m \leq n$ condiciona a existência de um número c tal que $n = m + c$.

Vamos multiplicar $m^k \leq n^k$ por $m + c$ e n.
$m \leq n \Rightarrow m^k\ .\ (m + c) \leq n^k \cdot n$
$\Rightarrow m^k \cdot m + m^k \cdot c \leq n^{k+1}$
$\Rightarrow m^{k+1} + m^k \cdot c \leq n^{k+1}$
Isto significa que:
$m \leq n \Rightarrow m^{k+1} \leq n^{k+1}$

Logo, a proposição é válida para todos os números naturais.

Nota: Se $m = 0$ ou $n = 0$, o expoente não deve ser zero, pois a expressão 0^0 não tem significado.

ACTIVIDADES 22 E 23

Actividades

1. Nega as proposições seguintes:
   a) $4 \in \mathbb{N}$
   b) Todos os números pares são primos.
   c) $\pi > 3,2$
   d) $4 \times 5 = 21$

2. Seja dada a proposição P: $4 + 8 < 13$.
   a) Qual é o valor lógico de P?
   b) Escreve a negação de P.
   c) Indica o valor lógico de $\sim P$.

3. Sejam A, B e C as proposições:
   A: 2 é um número par   B: 2 é um número primo   C: 2 é divisor de 4
   Traduz em linguagem corrente o significado das expressões:
   a) $A \wedge B$ b) $A \wedge C$ c) $\sim C \wedge A$ d) $\sim(B \wedge C)$

4. Sabendo que $T \vee R$ é falsa, qual é o valor lógico das seguintes expressões?
   a) $T \vee \sim R$ b) $\sim T \vee \sim R$ c) $\sim T \vee R$

5. Prova as seguintes propriedades através de tabelas de verdade.
   a) Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   b) Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6. Completa o quadro.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim(P \Rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F	V	F	V	F

$\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q$

7. Considera as proposições:
   P: Ana é inteligente.
   Q: Ana tem boas notas.
   Escreve na linguagem corrente as seguintes proposições:
   a) $P \Rightarrow Q$
   b) $\sim P \Rightarrow Q$
   c) $Q \Rightarrow P$
   d) $P \Leftrightarrow Q$
   e) $\sim P \Rightarrow \sim Q$

Actividades

8. Considera as proposições:

A: Maputo é cidade africana.

B: Maputo é capital de Moçambique.

C: Maputo é substantivo.

Escreve na linguagem simbólica as proposições:

a) Maputo não é cidade africana.

b) Se Maputo é substantivo, então é capital de Moçambique.

c) Maputo é capital de Moçambique se e só se é uma cidade africana.

d) Maputo é cidade africana e é capital de Moçambique.

9. Simplifica as proposições:

a) $A \wedge (\sim A \wedge B)$

b) $\{(P \wedge Q) \vee [(\sim P \vee \sim Q) \wedge Q]\} \wedge P$

10. Mostra que (usa tabelas de verdade):

a) $(\sim P \vee P) \wedge P = P$

b) $(\sim P \vee \sim Q) \wedge (P \wedge Q) = F$

c) $(\sim P \wedge P) \vee (P \vee Q) = P \vee Q$

d) $P \vee (Q \wedge \sim P \wedge R) = P \vee (Q \wedge R)$

11. Simplifica as expressões:

a) $[(P \Rightarrow Q) \vee \sim(P \Rightarrow Q)] \wedge (P \vee \sim P)$

b) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge \sim Q)$

c) $\sim[(\sim A \wedge \sim B) \wedge B] \wedge \sim (A \vee C)$

12. Considera verdadeira a proposição:

M: $\sim P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)$.

a) Sabendo que R tem valor lógico V, qual é o valor lógico de P?

b) Determina a negação de M.

13. Considera as proposições A, B e C.

A: Sérgio teve 15 valores a Matemática.

B: Sérgio teve 15 valores a Biologia.

C: Sérgio teve 15 valores a Português.

Admitindo como falsa a proposição $(A \wedge C) \vee (\sim A \vee B)$, descobre em que disciplinas o Sérgio teve 15 valores.

14. Escreve a negação das proposições:

a) $A \wedge \sim B$

b) $\sim A \vee B$

c) $(A \wedge B) \vee \sim C$

d) $(A \wedge B) \wedge C$

e) $(A \vee \sim B) \wedge \sim C$

Actividades

15. Prova, utilizando propriedades das operações lógicas, que:
   a) $(\sim A \wedge B) \wedge A = F$
   b) $A \vee (\sim A \vee B) = V$
   c) $A \wedge B \vee \sim A) = A \wedge B$
   d) $A \vee (B \wedge \sim A) = A \vee B$

16. Classifica em $\mathbb{R}$ cada uma das seguintes condições:
   a) $x + 1 = 3$
   b) $x^2 + 3 = 0$
   c) $x^2 + x \geq x^2$
   d) $x + 5 < 0$
   e) $x > 0$
   f) $x + 2x = 0$

17. Traduz em linguagem corrente as proposições seguintes:
   a) $\forall\, x \in \mathbb{R}: x^2 = 2x$
   b) $\forall n \in \mathbb{N}: n < 1 + n$
   c) $\exists\, n \in \mathbb{N}: 2n + 1$ é ímpar
   d) $\exists\, x \in \mathbb{R}: x = \frac{1}{x}$

18. Traduz em linguagem simbólica as seguintes proposições quantificadas:
   a) O quadrado de qualquer número real é igual ao seu dobro.
   b) Existe pelo menos um número natural cujo consecutivo é menor que o seu antecedente.
   c) Todo o número par é gerado pela expressão $2n$, onde n é um número natural.
   d) O inverso de qualquer número natural é igual ao próprio número.

19. Considera o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Indica o valor lógico das seguintes proposições:
   a) $\forall\, x \in A: 2x = 10$
   b) $\exists\, x \in A: 2x = 10$
   c) $\exists\, x \in A: x^2 - 5 > 0$
   d) $\forall\, x \in A: x^2 \geq 1 + x$
   e) $\forall\, x \in A: |x| > 0$
   f) $\exists\, x \in A: x^2 - 9 = 0$

20. Indica o valor lógico das proposições seguintes:
   a) $\forall\, x \in \mathbb{R}: x + 1 = 5$
   b) $x > \frac{x}{2}, \forall\, x \in \mathbb{R}$
   c) $x < x + 1, \forall\, x \in \mathbb{Z}$
   d) $\exists\, x\ \mathbb{R}: x^2 = 4$

21. Escreve em linguagem simbólica a negação de cada proposição:
   a) $\exists\, x \in \mathbb{R}: x \neq 0$
   b) $\forall x \in \mathbb{Z}: x \in \mathbb{Q}$
   c) $\forall n \in \mathbb{N}: n + 1 > 0$
   d) $\forall\, x \in Z_0^{\,+}: x \geq 0 \vee x \in \mathbb{N}$
   e) $\forall\, x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 5$
   f) $\exists\, x \in \mathbb{R}: x > 2 \vee x = 5$

22. Demonstra, por indução matemática, as seguintes propriedades:
   a) $a^m : b^m = (a : b)^m; \forall\, n \in \mathbb{N}$
   b) $a^m : a^n = a^{m-n}; \forall\, n \in \mathbb{N}$
   c) $(3 \times 2)^n = 3^n \cdot 2^n; \forall\, n \in \mathbb{N}$

23. Aplicando o método de indução, demonstra que:
   a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2; \forall\, n \in \mathbb{N}$
   b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1); \forall\, n \in \mathbb{N}$

Unidade 2

Álgebra

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

- classificar uma expressão algébrica;
- realizar operações com expressões algébricas;
- determinar o domínio de uma expressão algébrica;
- resolver equações (lineares, quadráticas, racionais e irracionais);
- resolver sistemas de três equações lineares;
- resolver problemas que envolvem equações.

2.1 Expressões algébricas

Uma expressão diz-se algébrica quando a variável x está sujeita apenas a operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão ou extracção da raiz.

Exemplos

$3x^2 + 8$; $\sqrt{3x} + 5$; $\frac{2x-1}{x^2+5}$; $\frac{4x}{x-2} + x^2$

2.1.1 Classificação de expressões algébricas

Uma expressão algébrica pode ser **racional inteira**, **racional fraccionária** ou **irracional**.

Expressão algébrica racional inteira

Uma expressão diz-se expressão algébrica racional inteira quando não se indica uma divisão em que a variável fica no divisor e não aparece sob sinal de radical.

Exemplos

$3x^2 + 8x - 2$; $\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \sqrt{2}x + 4$

Expressão algébrica racional fraccionária

Uma expressão diz-se expressão algébrica racional fraccionária quando no divisor figura a variável.

Exemplos

$\frac{2x^2+4x+1}{x-7}$; $\frac{3}{x^2-4}$; $\frac{x}{x^2+x-2}$

Expressão algébrica irracional

Uma expressão diz-se expressão algébrica irracional quando, sob sinal de radical, figura a variável.

Exemplos

$\sqrt{x} - 4$; $\frac{\sqrt{x^2+2}}{4-x}$; $3\sqrt{x} + x^2$

2.1.2 Polinómios – expressões algébricas inteiras

$P(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - x + 6$ é o exemplo de um polinómio ordenado segundo as potências decrescentes de x.

Assim:

- $P(x)$ é um polinómio do 4.° grau;
- 6 é o termo independente;
- $P(x)$ tem 5 termos.

Um polinómio completo do grau k tem $k + 1$ termos não nulos.

Polinómios idênticos

Dois polinómios $A(x)$ e $B(x)$ são idênticos se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau da incógnita são iguais.

Exemplo

$A(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e $B(x) = (a-1)x^2 + (a+b)x + (c-2b)$

Para que $A(x) = B(x)$, é necessário que:

$$\begin{array}{rcrcr} a - 1 = 2 & \wedge & a + b = -3 & \wedge & c - 2b = 4 \\ a = 3 & & 3 + b = -3 & & c - 2(-6) = 4 \\ & & b = -6 & & c + 12 = 4 \\ & & & & c = -8 \end{array}$$

Domínio de um polinómio em $\mathbb{R}$

As operações indicadas num polinómio são a adição, a subtracção e a multiplicação. Todas elas são possíveis em $\mathbb{R}$. Por isso, o domínio de um polinómio é $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES 1 A 4

2.1.3 Operações com polinómios

Adição

Dados os polinómios $A(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$ e $B(x) = 3x^3 - 5x + 5$, calcula-se $A(x) + B(x)$:

1.° ordenando-se o polinómio se está desordenado;

2.° associando-se os coeficientes dos termos do mesmo grau.

$A(x) + B(x) = (2 + 3)x^3 - x^2 + (4 - 5)x + (-3 + 5)$

$A(x) + B(x) = 5x^3 - x^2 - x + 2.$

Multiplicação

O produto de dois polinómios é o polinómio que se obtém multiplicando cada termo do 1.° por cada termo do 2.° polinómio e adicionando os monómios obtidos.

Exemplo

Sendo $A(x) = x^2 - 3x + 4$ e $B(x) = x - 2$, então:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (x^2 - 3x + 4)(x - 2) \\ &= x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) - 3x \cdot x - 3x \cdot (-2) + 4 \cdot x + 4 \cdot (-2) \\ &= x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + 4x - 8 \\ &= x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES 5 A 8

2.1.4 Divisão inteira de polinómios

Recorda a divisão de dois números naturais.

dividendo (D) — divisor (d)

$$\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

resto (r) — quociente (q)

$D = d \cdot q + r$

$9 = 5 \cdot 1 + 4$

$D = d \cdot q + r$

Procede-se da mesma forma para efectuar $(3x^2 + 2x + 4) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} \overset{D}{3x^2 + 2x + 4} & \overset{d}{x - 2} \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6x & \underset{q}{3x + 8} \\ \hline 8x + 4 & \\ -8x + 16 & \\ \hline 0 + \underset{r}{20} & \end{array}$$

Cálculo auxiliar: $3x^2 : x = 3x$

$8x : x = 8$

Prova: $3x^2 + 2x + 4 = (x - 2)(3x + 8) + 20$
$= 3x^2 + 8x - 6x - 16 + 20$
$= 3x^2 + 2x + 4$

Se o resto se reduz a zero, diz-se que a divisão é exacta.

Exemplo

Vamos calcular o quociente e o resto da divisão de $x^5 - 29x + 12$ por $-x^2 - 2x + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 \ - 29x + 12 & -x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 - 2x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & -x^3 + 2x^2 - 5x + 12 \\ \cline{1-1}
-2x^4 + x^3 + 0x^2 \ - 29x + 12 & \\
+2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
5x^3 - 2x^2 - 29x + 12 & \\
-5x^3 - 10x^2 - 5x + 0 & \\ \cline{1-1}
-12x^2 - 24x + 12 & \\
12x^2 + 24x - 12 & \\ \cline{1-1}
0 + 0 + 0 &
\end{array}
$$

$q(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 12$
$r(x) = 0$

2.1.5 Regra de Ruffini

A regra de Ruffini consiste na divisão de um polinómio por um binómio do tipo $x - a$:

Para $x - 2$, $a = 2$
Para $x + 2$, $a = -2$
Para x, $a = 0$
Para $2x + 1 = 2(x + \frac{1}{2})$, $a = -\frac{1}{2}$

Exemplo 1

Vamos calcular o quociente e o resto da divisão inteira de $3x^2 + 2x + 4$ por $x - 2$. Observa o esquema.

$$
\begin{array}{c|ccc}
a & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 3 & 2 & 4 \\
2 & & 6 & 16 \\ \hline
 & 3 & 8 & \boxed{20} \leftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

$q(x) = 3x + 8$
$r(x) = 20$

Prova:
$(x - 2)(3x + 8) = 3x^2 - 6x + 8x - 16$
$= 3x^2 + 2x - 16$
$D(x) = 3x^2 + 2x - 16 + 20$
$D(x) = 3x^2 + 2x + 4$

Exemplo 2

Vamos calcular o quociente e o resto da divisão inteira de $x^3 - 2x^2 + x - 2$ por $x + 2$. Neste caso, $a = -2$.

$$\begin{array}{c|cccc}
a & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
-2 & & -2 & 8 & -18 \\
\hline
 & 1 & -4 & 9 & \boxed{-20}
\end{array}$$

$q(x) = x^2 - 4x + 9$

$r(x) = -20$

2.1.6 Teorema do resto

O teorema do resto diz que o resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por um binómio do tipo $x - a$ é igual a $P(a)$.

$$\begin{array}{r|l}
P(x) & x - a \\
\cline{2-2}
r = P(a) & q(x)
\end{array}$$

Demonstração

Queremos provar que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor que toma o dividendo ao substituir x por a.

Já sabemos que $D = d \cdot q + r$, isto é, $P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$. Substituindo x por a temos:

$P(a) = (a - a) \cdot q(x) + r$

$P(a) = 0 \cdot q(x) + r$

$P(a) = r$

c.q.d.

Exemplo 1

Vamos calcular o resto da divisão de $P(x) = 3x^2 + 2x + 4$ por $x - 2$.

$r = P(2)$

$r = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4$

$r = 12 + 4 + 4$

$r = 20$

Exemplo 2
Vamos calcular a e b de modo que -3 e 0 sejam os restos da divisão, respectivamente, de $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ por $x - 2$ e $x + 1$.

$$\begin{cases} P(2) = -3 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2a + b = -3 \\ (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 8 + 2a + b = -3 \\ -1 - 2 - a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

ACTIVIDADES 9 A 18

2.1.7 Zero de um polinómio

Se o resto da divisão do polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual a zero, então a chama-se raiz ou zero do polinómio $P(x)$. Isto é, se $P(a) = 0$, então a é a raiz do polinómio $P(x)$. Assim, o polinómio $P(x)$ diz-se divisível por $x - a$.

Exemplo 1
Verifiquemos se 2 é raiz do polinómio $P(x) = -x^3 - 2x^2 - 5x + 10$.

$r = P(2)$
$r = -2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5.2 + 10$
$r = -8 + 8 - 10 + 10$
$r = 0$

O polinómio $P(x) = -x^3 - 2x^2 - 5x + 10$ é divisível por $x - 2$.

2.1.8 Factorização de polinómios

O teorema do resto tem aplicação na decomposição de um polinómio em factores, pois, se a é raiz do polinómio P(x), este é divisível por $x - a$. Logo, $P(x) = (x - a) \cdot q(x)$.

Exemplo

Vamos factorizar o polinómio $P(x) = 4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$ sabendo que 3 é um dos seus zeros.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -9 & -10 & 3 \\ 3 & & 12 & 9 & -3 \\ \hline & 4 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$r = 0$

$q(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$4x^2 + 3x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4(-1)$

$\Delta = 25$

$x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$ ou $4x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(4x - 1)$

$\Rightarrow P(x) = (x - 3)4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$ ou $P(x) = (4x - 1)(x + 1)(x - 3)$

2.1.9 Identidades notáveis

A identidade é uma forma de mostrar que duas expressões têm o mesmo valor.

Diferença de quadrados

Exemplo

Vamos factorizar o polinómio $P(x) = x^2 - a^2$, $a \in \mathbb{R}$. É fácil notar que $x = a$ é uma das raízes do polinómio.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -a^2 \\ a & & a & a^2 \\ \hline & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$q(x) = x - a$

$r = 0$

$\Rightarrow P(x) = (x + a)(x - a)$, isto é,

$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.

Em geral: $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ – diferença de quadrados.

Diferença de cubos

Exemplo

Seja $P(x) = x^3 - a^3$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$q(x) = x^2 + ax + a^2$

$r = 0$

$\Rightarrow x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a)$

Em geral, temos: $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$ – diferença de cubos.

Seguindo o mesmo procedimento, temos: $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$ – soma de cubos.

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + b^3$

Exemplos

Vamos calcular, usando as identidades notáveis:

a) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

b) $4^3 - 3^3 = (4 - 3)(4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2)$
$= 1 \cdot (16 + 12 + 9)$
$= 28 + 9$
$= 37$

c) $99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1)$
$= 100^2 - 1^2 = 10000 - 1$
$= 9999$

ACTIVIDADES 19 A 28

2.2 Expressões algébricas fraccionárias

As expressões do tipo $\frac{A}{B}$ em que A e B são expressões algébricas chamam-se fracções algébricas (com $B(x) \neq 0$).

Exemplos

$\frac{x+1}{x^2+x-1}$; $\frac{4}{7-x^2}$; $\frac{2x+5}{x^3-4x+1}$

O **domínio de uma fracção algébrica** é o conjunto de todos os números reais que não anulam o denominador.

Exemplo

Vamos calcular o domínio das seguintes fracções:

a) $\frac{x+5}{x-2} \Rightarrow$ condição: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow$ D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\frac{3x+4}{x^2-4} + \frac{x}{x-5} \Rightarrow$ condição: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ e $x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$

$\Rightarrow$ D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$

2.2.1 Simplificação de fracções algébricas

Para simplificar uma fracção, há passos a seguir.

Para simplificar a fracção $\frac{x^2-7x+12}{x^3-4x^2+x+6}$ podemos seguir os seguintes passos:

1.° passo: factorizar os termos da fracção.

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-3)(x^2 - x - 2)$$
$$= (x-3)(x-2)(x+1)$$

2.° passo: simplificar os termos iguais.

$$\frac{x^2-7x+12}{x^3-4x^2+x+6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-2)(x+1)} = \frac{(x-4)}{x^2-x-2}$$

$\Rightarrow$ D: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 2, 3\}$

2.3 Operações com fracções algébricas

As operações com fracções algébricas seguem, em geral, as mesmas regras definidas para fracções numéricas.

2.3.1 Adição algébrica

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{5}{x^2-1}$

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$\Leftrightarrow \underset{(x-1)}{\frac{x}{x+1}} + \underset{(1)}{\frac{5}{x^2-1}} = \frac{x^2 - x + 5}{x^2 - 1}$

$m.m.c. = (x + 1)(x - 1)$

$\Rightarrow D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b) $\frac{5}{2-2x^4} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$2 - 2x^4 = 2(1 - x^4)(1 - x^2)$

$= 2(1 + x^2)(1 - x)(1 + x)$

$m.m.c. = 2(1 + x^2)(1 - x)(1 + x)$

$\Leftrightarrow \underset{(1)}{\frac{5}{2-2x^4}} + \underset{(2+2x^2)}{\frac{1}{x^2-1}} - \underset{(2+2x^2)(1)}{\frac{1}{x-1}}$

$\Leftrightarrow \frac{5 - 2 - 2x^2 + 2 + 2x^2 + 2x + 2x^3}{2(1 + x^2)(1 - x)(1 + x)}$

$= \frac{2x^3 + 2x + 5}{2 - 2x^4}$

$\Rightarrow D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

2.3.2 Multiplicação de fracções algébricas

Vamos efectuar as multiplicações seguintes e apresentar o resultado simplificado quanto possível.

Exemplo 1

$\frac{5x}{2+x} \cdot \frac{x+5}{7x}$

$\frac{5x}{2+x} \cdot \frac{x+5}{7x}$

D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$

$\frac{5x}{2+x} \cdot \frac{x+5}{7x} = \frac{5x(x+5)}{(2+x)7x} = \frac{5x^2+25x}{14x+7x^2} = \frac{x(5x+25)}{x(14+7x)}$

$= \frac{5x+25}{14+7x}$

Exemplo 2

$(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2x-4} \cdot \frac{3x}{5}$

$\frac{(x-2)(x-2) \cdot 3x}{2(x-2) \cdot 5} = \frac{(x-2) \cdot 3x}{10} = \frac{3x^2 - 6x}{10}$

D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2.3.3 Divisão de fracções algébricas

Recorda que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ se $b, c, d, \neq 0$. Procede-se da mesma forma com as fracções algébricas.

Exemplo 1

$\frac{2x}{3} \div \frac{3x}{x+2}$ D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$

$\frac{2x}{3} \div \frac{3x}{x+2} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{x+2}{3x} = \frac{2(x+2)}{3 \cdot 3} = \frac{2x+4}{9}$

Exemplo 2

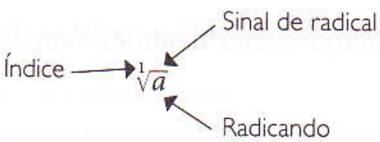
$\frac{x^2-4}{x+1} \div \frac{x+2}{x^2-1}$ D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1\}$

$\frac{(x+2)(x-2) \cdot (x+1)(x-1)}{(x+1) \cdot (x+2)} = \frac{(x-2)(x-1)}{1} = x^2 - 3x + 2$

ACTIVIDADES 29 A 32

2.4 Expressões algébricas irracionais

Uma expressão algébrica irracional apresenta a incógnita no radicando.



Expressões irracionais

- de índice par: D: $a \geq 0$;
- de índice ímpar: D: $a \in \mathbb{R}$, se o radicando é uma expressão algébrica racional inteira.

Exemplos

Vamos calcular o domínio das seguintes expressões:

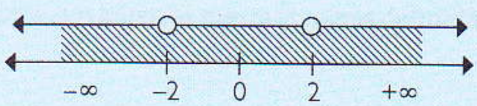
a) $A(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 4x + 3}$

D: $x \in \mathbb{R}$, porque o radicando é um polinómio e o índice é um número ímpar.

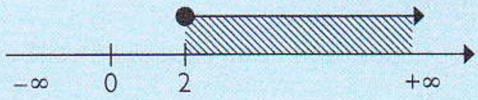
b) $B(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-4}}$.

Condição, $x^2 - 4 \neq 0$

D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

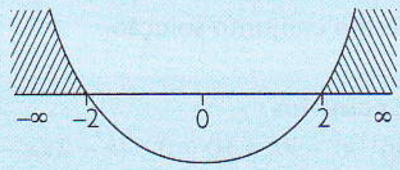


c) $C(x) = \sqrt{x-2}$



Porque o índice é par, a condição é:
$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

d) $D(x) = \sqrt{x^2 - 4}$



Porque o índice é par, a condição é:
$x^2 - 4 \geq 0$
D: $x \leq -2 \vee x \geq 2$ ou $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

2.4.1 Racionalização de denominadores das fracções algébricas

Para a racionalização dos denominadores recorre-se com frequência às propriedades da potenciação e às identidades notáveis.

Para as fracções algébricas do tipo $\frac{q}{\sqrt[n]{a^m}}$, o factor racionalizante é $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ porque $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Exemplos

a) $\frac{8}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^1}} = \frac{8\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{8\sqrt[3]{2}}{2} = 4\sqrt[3]{2}$

b) $\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}}{x} = x^2\sqrt[5]{x^2}$

Para a fracção do tipo $\frac{q}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, o factor racionalizante é $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

Exemplos

a) $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2 - 3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{4\sqrt{x} + 4\sqrt{5}}{x - 5}$

ACTIVIDADES 33 A 36

2.5 Equações

2.5.1 Equivalência de equações

O domínio de uma equação é o conjunto de valores do universo para os quais a equação tem solução real.

Considera as equações:

a) $\frac{3}{x-1} - \frac{x+2}{x-3} = 0$

O domínio desta equação é $\mathbb{R}\backslash\{1; 3\}$

b) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{x-3}$

O domínio desta equação é $x \geq 2$ e $x \neq 3$.

Na equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, o conjunto solução é S = {5; 2}. Para esta equação, 2 e 5 chamam-se raízes da equação considerada.

No mesmo domínio, diz-se que duas equações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Exemplos

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e $(x-2)(x-5) = 0$ são equivalentes porque têm o mesmo conjunto solução, S = {2; 5}.

b) $x(x^2 - 1) = 0$ e $x^3 - x = 0$ são equivalentes porque têm o mesmo conjunto solução, S = {0; −1; 1}.

2.5.2 Equações do 2.° grau (revisões)

Na 9.ª e na 10.ª classes, aprendeste a resolver equações do 2.° grau (equações quadráticas).

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ equação quadrática

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

binómio discriminante

$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

raízes da equação quadrática

$\boxed{\Delta < 0}$	$\boxed{\Delta = 0}$	$\boxed{\Delta > 0}$
A equação não tem raízes.	A equação tem duas raízes iguais.	A equação tem duas raízes diferentes.

Exemplo 1

Vamos resolver a equação $x^2 - 7x + 10 = 0$.

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$ $\qquad x_1 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$

$\Delta = 49 - 40$ $\qquad x_2 = \frac{7-\sqrt{9}}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$

$\Delta = 9$ $\qquad$ S = {2; 5}

Exemplo 2

Vamos resolver a equação $2x^2 - x + 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1$

$\Delta = -7$

Como $\Delta < 0$, a equação não é possível em $\mathbb{R}$.

2.5.3 Equações do 3.° grau (casos simples)

Uma equação do 3.° grau (equação cúbica) é do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Neste ano, vais aprender alguns casos simples deste tipo de equações.

Exemplo 1

Vamos resolver a equação $x^3 - x = 0$.

$x(x^2 - 1) = 0$ – factorização

$x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$ – anulamento do produto

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$ – extracção da raiz quadrada

$x = \pm 1$

$S = \{-1; 0; 1\}$

Exemplo 2

Vamos resolver a equação $2x^3 - x^2 - 11x + 10 = 0$, sabendo que 1 é uma das suas raízes.

Neste caso, primeiro aplica-se a regra de Ruffini e o teorema do resto.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -11 & 10 \\ 1 & & 2 & 1 & -10 \\ \hline & 2 & 1 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$q(x) = 2x^2 + x - 10$

Resolve-se a equação $2x^2 + x - 10 = 0$

$\Delta = 1 + 80 = 81$

$x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{2}$

a 3.ª raiz é 1 já dada.

$S = \{-2, 1, \frac{5}{2}\}$

2.5.4 Equações biquadráticas

As equações biquadráticas são as equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Fazendo $x^2 = t$, a equação transforma-se em $at^2 + bt + c = 0$.

Exemplo

Vamos resolver a equação $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Seja $x^2 = t$, então $t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 \qquad t_1 = \frac{(3+1)}{2} = 2$

$\Delta = 1 \qquad t_2 = \frac{(3-1)}{2} = 1$

Para encontrar o valor de x, substitui-se t na equação $x^2 = t$.

Assim, $x^2 = 2$ ou $x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = \pm 1$

$S = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

2.5.5 Equações com radicais

Uma equação diz-se irracional quando a incógnita está sujeita a um sinal de raiz ou a um expoente fraccionário.

Exemplo

$\sqrt{(x-7)} + \sqrt{(x^2 - 49)} = 0$

Resolução de uma equação irracional

a) Se $\sqrt{A} = B$ então $A = B^2$ com $A \geq 0$

$\sqrt{(2x+1)} = 3$ com $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$2x + 1 = 3^2$

$2x + 1 = 9$

$2x = 8$

$x = 4$

$S = \{4\}$

b) Se $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$ então $A = 0$ e $B = 0$

$\sqrt{(x-3)} + \sqrt{(18 - 2x^2)} = 0$ com $x \geq 3$ e $18 - 2x^2 \geq 0$

$x - 3 = 0 \wedge 18 - 2x^2 = 0 \qquad 18 \geq 2x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

$x = 3 \wedge x = \pm 3$

$S = \{3\}$

c) Se $\sqrt{A} = \sqrt{B}$, então A = B.

$\sqrt{x} = \sqrt{(4x - 3)}$ com $x \geq 0$ e $4x - 3 \geq 0 \Rightarrow$ D: $x \geq \frac{3}{4}$

$x = 4x - 3$

$-3x = -3$

$x = 1$

S = {1}

2.6 Inequações irracionais

Como resolver a inequação $(x - 1)(x + 3)(2x - 1) \geq 0$?

Primeiro, resolvem-se as equações por parcelas.

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Depois, organizam-se os zeros numa tabela por ordem crescente.

	-3	$\frac{1}{2}$	1	
$x - 1$	−	−	−	+
$x + 3$	−	+	+	+
$2x - 1$	−	−	+	+
P	−	+	−	+

De seguida, estuda-se o sinal.

Por fim, escolhe-se o intervalo correspondente à condição dada.

S: $x \in [-3; \frac{1}{2}] \vee [1; +\infty[$

ACTIVIDADES 37 A 50

2.7 Sistemas de equações lineares

2.7.1 Sistemas de equações lineares a 2 incógnitas (revisão)

Vamos rever a resolução de sistemas a partir do seguinte exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Método de substituição

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x + 3(3 - x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ -x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

S = {4; −1}

Método de adição ordenada

$$(-2)\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ \underline{2x + 3y = 5} \\ 0 + y = -1 \end{cases}$$

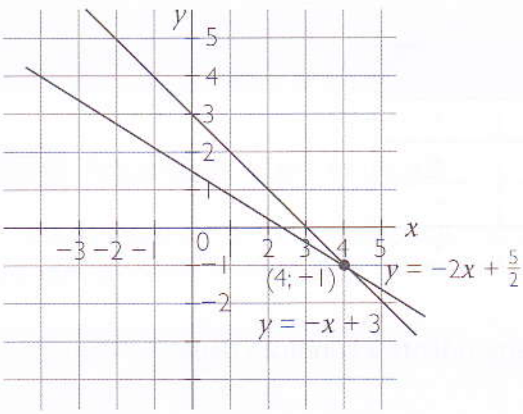
$$(-3)\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -9 \\ \underline{2x + 3y = 5} \\ -x + 0 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$S = \{4; -1\}$

Método gráfico

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} \end{cases}$$

Deve representar-se graficamente cada uma das funções obtidas.



$S = \{4; -1\}$

Método de Cramer

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} ; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1$$

$$; \Delta = 3 - 2; \Delta = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1$$

$$\Delta_x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

$$\Delta_y = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1$$

$S = \{4; -1\}$

2.7.2 Sistemas de equações lineares a 3 incógnitas

A um sistema do tipo $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

em que a_n, b_n, c_n e d_n são números reais, chama-se sistema de equações lineares a 3 incógnitas x, y e z.

Como resolver um sistema de 3 equações?

Para resolver um sistema de 3 equações a 3 incógnitas, usam-se os mesmos métodos aplicados nos sistemas de 2 equações.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Método de substituição

Para resolver um sistema pelo método de substituição, resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substitui-se o seu valor nas restantes equações.

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - 9y \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - 9y \\ x - 5y + 2x - 9y = 1 \\ -x + 3y + 2(2x - 9y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 3x - 14y = 1 \\ 3x - 15y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 3x - 14y = 1 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 3(5y) - 14y = 1 \\ x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ y = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 2 \cdot 5 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$S = \{5, 1, 1\}$

Método de adição ordenada

Começa-se por eliminar uma das incógnitas: neste caso x, na última equação, multiplicando a 2.ª equação por -2;

Elimina-se a segunda incógnita. Neste caso, multiplica-se a 2.ª equação por 2 para obter $z = 1$;

Substitui-se $z = 1$ na equação anterior para obter $y = 1$ e, finalmente, substitui-se z e y na primeira equação.

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ -x + 3y + 2 \cdot z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ -2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ -2x + 10y - 2z = -2 \\ -2y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ -2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ 2y - 6z = -4 \\ -2y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ -3z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9 - 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 10 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Método de Cramer

$$\begin{cases} 2x - 9y - z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Primeiro, calcula-se o determinante do sistema.

$$(-5) \quad (6) \quad (-18)$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -9 & -1 & 2 & -9 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right.$$

$$(-20) \quad (9) \quad (-3)$$

$\Delta = -20 + 9 - 3 - (-5 + 6 - 18)$

$\Delta = -14 - (-17)$

$\Delta = -14 + 17$

$\Delta = 3$

Para calcular o determinante do x, substitui-se a 1.ª coluna pela coluna dos termos independentes.

$$\begin{array}{c} \\ \Delta_x = \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc|cc} & & 0 & 0 & -18 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & -9 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ & & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

$\Delta_x = 0 + 0 - 3 - (0 + 0 - 18)$

$\Delta_x = 15$ logo $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{3} = 5$

$\Delta_x = 5$

Para calcular o determinante do y, substitui-se a 2.ª coluna pela coluna dos termos independentes, no determinante do sistema.

$$\begin{array}{c} \\ \Delta_y = \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc|cc} & & (1) & (0) & (0) \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ & & (4) & (0) & (0) \end{array}$$

$\Delta_y = 4 + 0 + 0 - (+1 + 0 + 0)$

$\Delta_y = 4 - 1 = 3;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$

$\Delta_y = 1$

Para calcular o determinante de z, substitui-se a 3.ª coluna pela coluna dos termos independentes no determinante principal.

$$\begin{array}{c} \\ \Delta_z = \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc|cc} & & (0) & (6) & (0) \\ 2 & -9 & 0 & 2 & -9 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ & & (0) & (9) & (0) \end{array}$$

$\Delta_z = 0 + 9 + 0 - (0 + 6 + 0)$

$\Delta_z = 9 - 6 = 3$

$\Delta_z = 3$ logo $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$

$\Delta_z = 1$

ACTIVIDADES 51 A 54

Actividades

1. Classifica as seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{3}{x}$

b) $\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

c) $\frac{(x + 1)}{(x^2 - 4)}$

d) $\sqrt{x^2 - 4} - 4x$

e) $(x^3 - 1)^2\,(2x - 8)$

f) $\frac{(\sqrt{3x} + 2)}{(x - 10)}$

2. Dado o polinómio $5x^3 - x^6 + 7 - 2x^2$, indica:
   a) o termo independente;
   b) o grau do polinómio.
   c) Ordena o polinómio segundo as potências decrescentes de x.

3. Calcula os números reais a e b de modo que o polinómio $P(x) = x^2 - 2ax + b$ seja idêntico a $M(x) = (x - 1)(x + 3)$.

4. Determina os números m, n e r para que o polinómio $M(x) = x^2 - 3x + 2$ seja idêntico ao polinómio $N(x) = (x - 2)(nx - 2m)x - 2n + r$.

5. Sabendo que $A(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $B(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 - 3x^2 + x$ e $C(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 - 3x^2 + x$, calcula:

a) A + C

b) C + A − B

c) 2B + A − C

d) 2C + A

6. Dados os polinómios:
   $A(x) = 3x - x^2 + 3$
   $B(x) = x^2 - 1$
   $C(x) = -2x^3 - 2x^2 - x + 3$
   calcula:
   a) $B \cdot C$ b) $A \cdot C$ c) $A \cdot B$

7. Determina o polinómio correspondente a:
   a) $(x + 5)(x^3 - 2x^2 + x - 3)$
   b) $4x^2 - 3x(\frac{2}{3}x + 1)$
   c) $(4x - 1)(-3x(\frac{2}{3}x + 1) + 4x^2)$

8. Escreve sob a forma de polinómios:
   a) $(3x - 2)(x^2 - 4x + 2)$
   b) $[4x^3 - 3x(\frac{2}{3}x + 1)](4x - 1)$
   c) $(x - 1)(1 + 2x) - (x + 4)(4x - 1)$

Actividades

9. Calcula o quociente e o resto da divisão de:
   a) $x^7 - 1$ por $x - 1$
   b) $3x^2 - 5x + 4$ por $x - 2$
   c) $x^4 - x^3 + 1$ por $x + 2$
   d) $8x^3 - 2x - 1$ por $x + \frac{1}{2}$

10. Calcula o resto da divisão do polinómio $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ por:
    a) $x + 3$ c) x b) $2x - 3$ d) $2x - 2$

11. Calcula o quociente e o resto da divisão de:
    a) $x^4 - 3x^2 + 1$ por $x^2 - x - 1$
    b) $3x^4 - x^2 - 3$ por $x - 2$
    c) $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ por $x^3 - 2x$

12. Determina, pela regra de Ruffini, o quociente e o resto da divisão inteira de:
    $x^3 - x^4 + 5 + x^2$ por $x + 2$

13. Efectua as seguintes divisões, usando o esquema de Ruffini:
    a) $(4x^3 - 3) : (2x - 1)$
    b) $(8x^2 - 5x + 3) : (4x + 1)$
    c) $(3x^4 + x^2 + 1) : (3x + 2)$

14. Calcula o quociente e o resto da divisão de:
    a) $3x^2 - x^3 + 2$ por $-2x - x^2 + 1$
    b) $x^2 - 5x + 1$ por $x^3 + 2$
    c) $x^5 - 29x + 12$ por $-x^2 - 2x + 1$

15. Extrai a parte inteira da fracção:
    a) $\frac{(x^2 + 5x + 3)}{(x + 2)}$ b) $\frac{(5x^2 + 3x - 1)}{(x + 3)}$ c) $\frac{(x^3 - x + 3)}{(x^2 + 1)}$

16. Usa a regra de Ruffini para efectuar as seguintes divisões:
    a) $(3x^2 - 5x + 4) : (x - 2)$
    b) $(x^4 - x^3 + 1) : (x + 2)$
    c) $(8x^3 - 2x - 1) : (x + \frac{1}{2})$
    d) $(4x^3 - 5) : (2x - 1)$
    e) $(3x^4 + x^2 + 1) : (3x + 2)$
    f) $(8x^2 - 5x + 3) : (4x + 1)$

17. Observa o esquema de Ruffini na divisão de $P(x)$ por $(x + 2)$.

	a	3	-2	-12
-2		c	8	-12
	b	d	6	e

    a) $P(x)$ é divisível por $(x + 2)$? b) Determina $P(x)$.

18. Calcula a e b de modo que -3 e 0 sejam, respectivamente, os restos da divisão de:

Actividades

$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ por $(x - 2)$ e $(x + 1)$.

19. Factoriza o polinómio $2x^3 - x^2 - 3x$ sabendo que -1 é uma das raízes.

20. Decompõe em factores o polinómio $3x^2 - 7x + 2$ sabendo que admite $\frac{1}{3}$ como uma das raízes.

21. Factoriza o polinómio:
    a) $x^5 + 1$ sabendo que é divisível por $x + 1$;
    b) $x^7 - 1$ sabendo que 1 é uma das raízes;
    c) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ sabendo que toma valor zero ao substituir x por 2;
    d) $4x^5 + 8x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ sabendo que $x = -1$ é um zero triplo.

22. Calcula, usando as identidades notáveis:
    a) 11×9
    b) $8 + 27$
    c) $(5 + 4)^2$
    d) $125 - 64$

23. Factoriza os polinómios seguintes.
    a) $A(x) = x^3 + 8$
    b) $B(x) = x^3 - 64$
    c) $C(x) = \frac{1}{27} + x^3$

24. Sendo a, b e r números reais, calcula o seu valor de modo que:
    $x^2 - 3x + 2 = (ax + b)(x - 2) + r$

25. Considera o polinómio $x^3 - 3x^2 + 5x + 9$.
    a) Mostra que $x = 1$ é zero do polinómio.
    b) Factoriza o polinómio.

26. Encontra um polinómio do 2.° grau que admite -2 e 3 como raízes e que, dividido por $(x - 1)$, dê resto -12. Recorda que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

27. Sabendo que $x = -2$ é zero do polinómio $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$:
    a) Calcula os outros zeros.
    b) Factoriza o polinómio.

28. Dado o polinómio $2x^3 - x^2 + ax + b$:
    a) Calcula a e b de tal modo que o polinómio seja divisível por $(x - 1)(x - 2)$.
    b) Factoriza o polinómio.

29. Encontra o domínio de cada uma das seguintes expressões:

Actividades

a) $\frac{x-2}{(x-2)(x^2-7x+12)}$

b) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+5}$

c) $\frac{x+7}{x^2+3}+\frac{1}{x^2-1}$

d) $\frac{5x^2-4}{2x^2-x}+\frac{2-x}{x}+\frac{3}{x^3-4x}$

30. Simplifica, mostrando em cada caso o domínio de equivalência:

a) $\frac{2x^2-x-1}{x^3-1}$

b) $\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+2x}$

c) $\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$

d) $\frac{x^2+x-20}{32-2x^2}$

31. Simplifica as fracções seguintes:

a) $\frac{ax+a}{2a}$

b) $\frac{x^3-xa}{x^2-2x+1}$

c) $\frac{2x+2}{2x^2+4x+2}$

32. Efectua as operações apresentadas e apresenta o resultado simplificado:

a) $\frac{1}{2x}-\frac{4}{x}+\frac{3}{3x}$

b) $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}$

c) $\frac{x+5}{x^2-25}-\frac{x+1}{5-x}$

d) $\frac{3}{2x}\cdot\frac{8}{x-1}$

e) $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}:\frac{x^2-2ax+a^2}{x+a}$

f) $(\frac{1}{x}-\frac{2}{x})^2:(\frac{x-1}{x})^2$

33. Calcula o domínio de existência de cada uma das seguintes expressões:

a) $\sqrt{3-x}$

b) $\sqrt[7]{(x^5-25)}$

c) $\frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$

d) $\frac{x-5}{\sqrt{x-5}}$

e) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x}$

34. Racionaliza os denominadores das seguintes fracções:

a) $\frac{2}{\sqrt[6]{8}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[4]{27}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

d) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

e) $\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{2}}$

f) $\frac{x}{\sqrt{1-4x}+2}$

g) $\frac{x+2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

h) $\frac{3}{2-\sqrt[3]{x}}$

Actividades

35. Calcula o domínio de cada uma das seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 8}$

b) $\frac{x + 3}{x^2 + 1}$

c) $\sqrt{x + 2}$

d) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$

e) $\frac{1 + \sqrt{2 - x}}{x^2 - 4}$

f) $\frac{2 - \sqrt{5 - x}}{\sqrt[3]{x + 3}}$

36. Efectua:

a) $\frac{x}{2x + 2} + \frac{x^2}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x}{x^2 - 6x + 9} + \frac{2}{x^2 - 3x} - \frac{5}{2x^2}$

c) $\frac{1}{x + x^2} - \frac{x^2}{x + 1} + \frac{x^2 - 1}{x}$

d) $\frac{x - 2}{x - 1} \cdot \frac{2x}{1 + x}$

e) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - x} \cdot \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$

f) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 2}$

g) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 8x + 15} : \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 9}$

h) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 3x - 4} : \frac{x^2 + 10x + 25}{x - 1}$

37. Encontra a solução de cada uma das seguintes equações:

a) $4x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $3x^2 + 14x - 69 = 0$

c) $x^2 - x - 12 = 0$

d) $3x^2 + 8x + 16 = 0$

e) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

38. Sabendo que $x - \frac{1}{x} = 10$, calcula $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

39. Sem resolver a equação $2x^2 - 5x - 1 = 0$ de raízes x_1 e x_2, calcula o valor numérico de:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $x_1 - x_2$

d) $x_1^2 + x_2^2$

40. Calcula k de modo que a equação $(k^2 - 9)x + k^2 - k - 6 = 0$ tenha solução única.

41. Determina k por forma que a equação $(k - b)x + k^3 - b^3 = 0$ tenha solução indeterminada.

42. Determina k de modo que a equação $(9k^2 - 1)x = 6k + 1$ tenha uma solução impossível.

Actividades

43. Qual deve ser o valor de c para que a equação $3x^2 - 10x + c = 0$ tenha as duas raízes positivas?

44. Acha $a \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $a(2x^2 - 1) - (a + 1) - x = 0$ admita duas raízes distintas.

45. Acha n de modo que a equação $(2 - n)x^2 + (3 - 2n)x + n - 1 = 0$ admita -2 como raiz.

46. Para que valores de k, a equação $(k + 1)x^2 + (2k + 3)x + k - 1 = 0$ não tem raiz real?

47. Resolve as seguintes equações cúbicas:

a) $3x^3 - x2 + 2x = 0$

b) $x^3 - 8 = 0$

c) $125 + x^3 = 0$

d) $4x^3 - x = 0$

e) $4x^3 - 4x^2 - x + 1$

48. Resolve as seguintes equações biquadráticas:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $x^2 = x^4 - 2$

c) $5x^2 - 2x^4 + 3 = 0$

d) $13x^{12} - 5x^6 + 2 = 0$

e) $x^{10} = x^5 + 12$

f) $(1 - 3x)^4 - 5(1 - 3x)^2 + 6$

49. Resolve as seguintes equações:

a) $3x - \sqrt{x + 1} = 5$

b) $\sqrt{3 - \sqrt{x - 2}} - \sqrt{5} - x = 0$

c) $\frac{2\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x}} = \frac{17}{3}$

d) $\sqrt{x} + \sqrt{x} + 5 = \frac{10}{\sqrt{x}}$

Actividades

50. Resolve as seguintes inequações:

a) $\frac{x^2 - 1}{(2x - 1)(x^2 - 9)} < 0$

b) $\frac{(x + 2)(x - \sqrt{2})}{x - \sqrt{3}} \leq 0$

c) $\frac{1}{x^2} > 1$

d) $\frac{9 - x^2}{x - 2} + x > -3$

e) $\frac{2 - x}{3 - 2x} > \frac{1}{4}$

51. Resolve os sistemas seguintes pelos métodos indicados:

a) $\begin{cases} x = 4 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ pelo método de substituição

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ pelo método de adição ordenada

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$ pelo método de Cramer

d) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$ pelo método gráfico

e) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \\ 3(x - 1) - y = 11 \end{cases}$ por um método à escolha

52. Resolve os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 72 \\ 4x - 3y + 4z = 7 \\ -2x + 6y - 3z = -42 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 4y - 5z = -24 \\ 2x - 3y + 4z = 27 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3z = 38 \\ 2y + z = -2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

Actividades

d) $\begin{cases} 2z - 3y = 3 \\ 2(x + 3z) = 5x - 15 \\ 3(-2y + x) = 11 + 2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = -2 - 3z \\ 3x + 5y = 2z + 7 \\ z + 4 = 2x + 3y \end{cases}$

53. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 8x - 5y = -1 \\ 3x + 10y = 59 \end{cases}$

54. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 3y = z + 15 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-2}{3} = 0 \\ 4x - 3y = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Unidade 3

Equações e inequações exponenciais

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

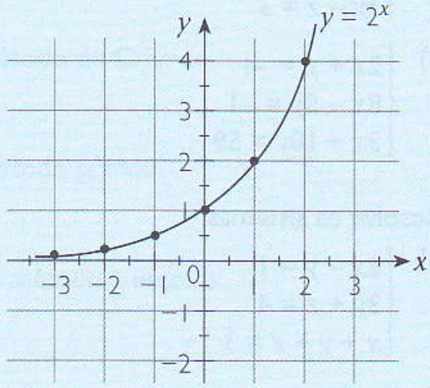
- distinguir as equações das inequações exponenciais;
- resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações exponenciais;
- solucionar problemas que requerem o uso das equações ou inequações exponenciais.

3.1 Função exponencial (revisão)

Ainda te lembras da construção do gráfico da função $f(x) = a^x$?
Observa o exemplo e recorda.

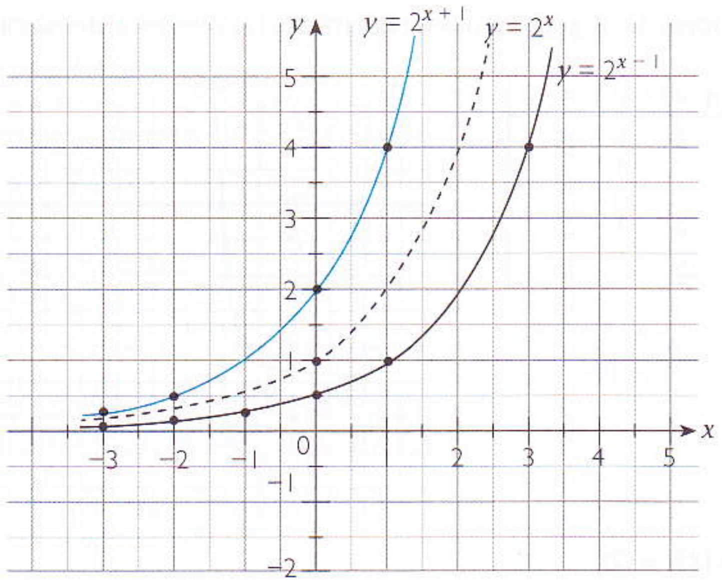
Exemplo
$f(x) = 2^x$

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Agora vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2^{x+1}$ e $g(x) = 2^{x-1}$.
Observa a tabela:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = 2^{x+1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y_2 = 2^{x-1}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



Nota que:

- podes construir o gráfico de $y = 2^{x+1}$, deslocando todos os pontos do gráfico da função $y = 2^x$ uma unidade para a esquerda;
- podes construir o gráfico de $y = 2^{x-1}$, deslocando todos os pontos do gráfico $y = 2^x$ uma unidade para a direita.

Em geral, obtém-se o gráfico da função $y = a^{x-p}$ deslocando todos os pontos da função $y = a^x$ p unidades para a esquerda se $p < 0$ ou p unidades para a direita se $p > 0$.

ACTIVIDADES 1 E 2

3.2 Equação exponencial

Examina as seguintes equações.

a) $3^{x+2} = 81$

b) $(\frac{1}{3})^{x^2-1} = 3^x$

c) $8^{x^2} = 64$

Nota que, nestas equações, a incógnita x aparece sempre no expoente. Equações deste tipo recebem o nome de **equações exponenciais**.

3.2.1 Resolução gráfica de equações

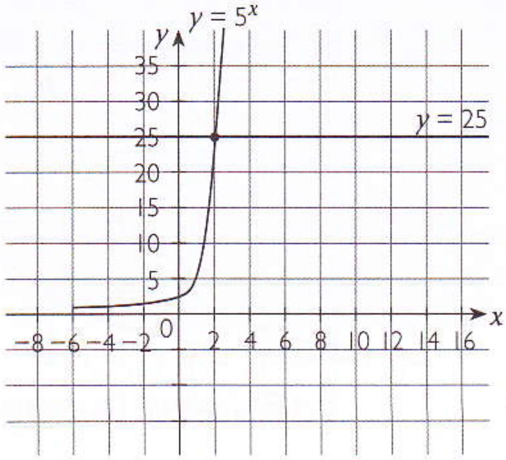
Observa a resolução gráfica da equação $5^x = 25$.

a) O membro esquerdo define a função $f(x) = 5^x$.

b) O membro direito define a função $g(x) = 25$.

c) Constroem-se os gráficos das duas funções no mesmo sistema cartesiano.

x	$y = 5^x$	$y = 25$
-1	$\frac{1}{5}$	25
0	1	25
1	5	25
2	25	25

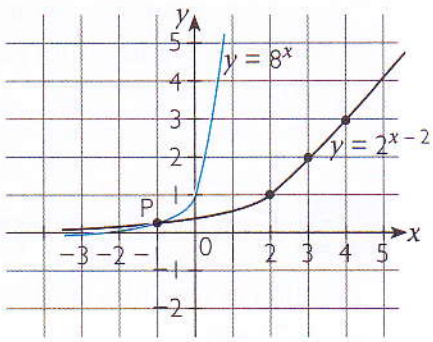


$S = \{5^x\} \cap \{25\} = \{2\}$

A partir dos gráficos, vemos que as duas funções se intersectam no ponto de $x = 2$.
A solução da equação $5^x = 25$ é 2.

Vamos, agora, resolver graficamente a equação $2^{x-2} = 8^x$. Vamos construir separadamente e no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções $f(x) = 2^{x-2}$ e $g(x) = 8^x$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^{x-2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x) = 8^x$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	1	8	64	512	4096



Observa que as duas funções se intersectam no ponto $(-1; \frac{1}{8})$. Logo, a solução da equação $2^{x-2} = 8^x$ é $x = -1$.

ACTIVIDADE 3

3.2.2 Resolução analítica de equações

Como se resolve a equação $2^{x-2} = 8^x$?

1.° passo: Reduzir os dois membros à mesma base:

$$2^{x-2} = (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^{3x}$$

2.° passo: Igualar os expoentes:

$$x - 2 = 3x$$

3.° passo: Resolver a equação:

$$x - 2 = 3x$$
$$x - 3x = 2$$
$$-2x = 2$$
$$x = -\frac{2}{2}$$
$$x = -1$$

4.° passo: Dar a solução:

$$2^{x-2} = 8^x \rightarrow S = \{-1\}$$

ACTIVIDADES 4 A 13

3.3 Inequação exponencial

Observa as inequações seguintes:

a) $3^x < 1$

b) $8^{x^2-2} \geq 64$

c) $2^{x-1} < 8$

d) $3^{x^2-2} \geq 3^x$

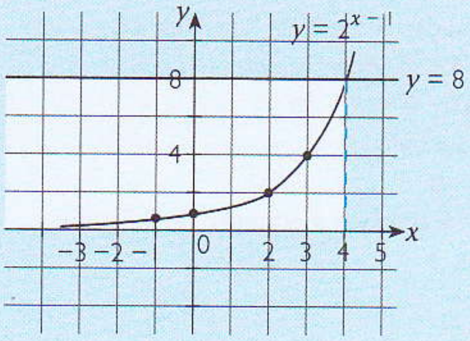
Nota que em todas as inequações a variável x aparece no expoente. As inequações deste tipo denominam-se **inequações exponenciais**.

3.3.1 Resolução gráfica de inequações exponenciais

Vamos observar a resolução gráfica de uma inequação exponencial.

Exemplo

Vamos resolver a inequação $2^{x-1} < 8$. Primeiro, constrói-se os gráficos das funções $f(x) = 2^{x-1}$ e $g(x) = 8$ num mesmo sistema cartesiano de coordenadas.



Repara que, para $x < 4$, o gráfico $f(x)$ situa-se abaixo do gráfico $g(x)$. Por isso, o conjunto-solução da inequação $2^{x-1} < 8$ é $x < 4$.

3.3.2 Resolução analítica de inequações exponenciais

Como resolver analiticamente a inequação $2^{x-1} < 8$?

Ainda te lembras das regras aprendidas na 10.ª classe? Então, observa.

Repara que $2^{x-1} < 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} < 2^3$.

Como a base é maior do que um, mantém o sentido da desigualdade na comparação dos expoentes. Isto é:

$x - 1 < 3$

Então, resolvendo a inequação temos: $x < 4$.

Como resolver a inequação $(\frac{1}{3})^{x^2-6x} \geq (\frac{1}{3})^{-5}$?

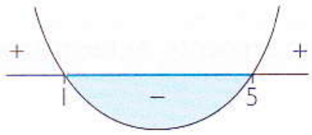
Nota que $\frac{1}{3} < 1$. Neste caso, muda o sentido do sinal da desigualdade ao comparar os expoentes:

$(\frac{1}{3})^{x^2-6x} \geq (\frac{1}{3})^{-5} \Leftrightarrow x^2 - 6x \leq -5$

Para resolver a equação, encontra os zeros da equação:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$



Logo, a solução da inequação $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ é:

$S = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 \leq x \leq 5\}$ ou $S = x \in [1; 5]$

ACTIVIDADES 14 A 21

3.3.3 Equações biquadráticas (revisão)

Uma equação do tipo $\boldsymbol{ma^{2x} + na^x + p = 0}$ chama-se equação biquadrática.

Exemplo

Vamos resolver a equação $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$:

a) lembrar que $a^t \cdot a^m = a^{t+m}$:

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 81 = 0$

b) sabendo que $3^{2x} = (3^x)^2$:

$3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0$

c) substituir 3^x por t e resolver a equação de 2.° grau:

$t^2 - 18 \cdot t + 81 = 0$

$t_1 = 9 \vee t_2 = 9$

d) substituir t por 3^x:

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

e) calcular x:

$x = 2$

$S = \{2\}$

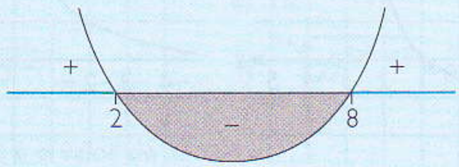
As equações do tipo $ma^{2x} + n \cdot a^x + p = 0$ resolvem-se seguindo os passos:
1.° passo: sabendo que $a^{2x} = (a^x)^2$, substituir a^x por t, $(t > 0)$;
2.° passo: resolver a equação $mt^2 + nt + p = 0$;
3.° passo: substituir t por a^x;
4.° passo: calcular o valor de x e escrever o conjunto-solução.

3.3.4 Inequações biquadráticas

Uma inequação do tipo $\boldsymbol{ma^{2x} + na^x + p \geq 0}$ chama-se inequação biquadrática.

Exemplo
Vamos resolver a inequação $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$.
Reescrevemo-la sob a forma $2^{2x} = (2^x)^2$.
Substituímos $2^x = t$ (podes usar outra letra).

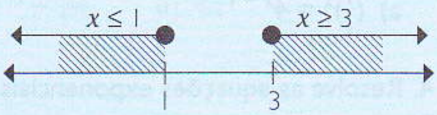
Agora, resolve a inequação quadrática:
$t^2 - 10t + 16 \geq 0$
$t^2 - 10t + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 8)(t - 2) \geq 0$



Graficamente, vemos que para a inequação ser verdadeira, $t \leq 2$ ou $t \geq 8$.

Substitui t por 2^x e resolve a inequação:

$2^x \geq 8 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 3$
$2^x \leq 2^1 \Leftrightarrow x \leq 1$
$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1 \vee x \geq 3\}$
ou
$S = x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

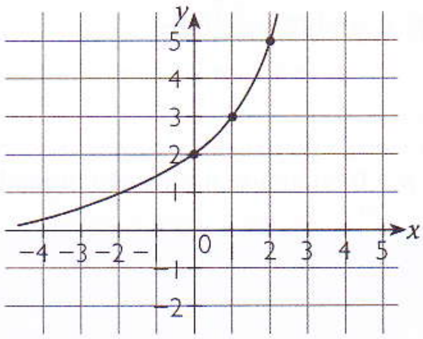


ACTIVIDADES 22 E 23

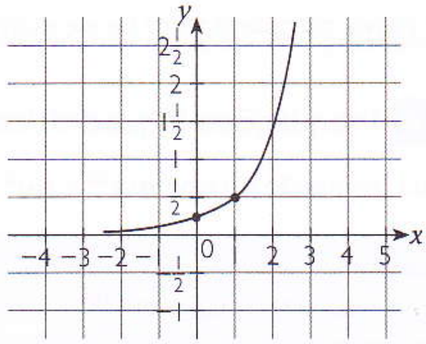
Actividades

1. Identifica o gráfico de cada uma das seguintes funções:
$f(x) = 2^{x-2}; g(x) = 2^x + 1; h(x) = 2^x - 2; m(x) = 2^{x+2}$.

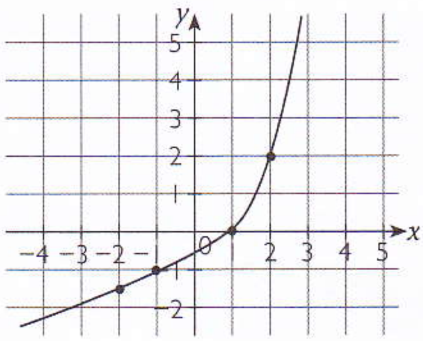
A



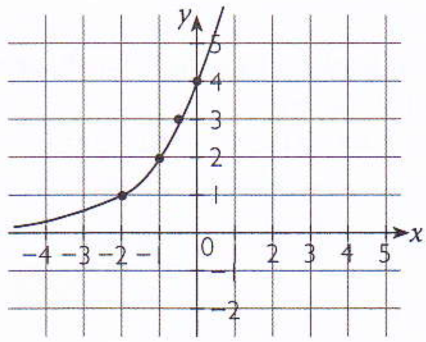
C



B



D



2. Constrói os gráficos de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

b) $g(x) = (\frac{1}{x})^{x-1}$

c) $h(x) = 2^{x-1} + 1$

d) $m(x) = 2^{x+1} - 2$

3. Resolve graficamente cada uma das equações seguintes:

a) $(\frac{1}{2})^x = 4^{x-1}$

b) $9^{x^2-4} = 3^{x-2}$

4. Resolve as equações exponenciais seguintes:

a) $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$

b) $5^{x^2-2x} = 0{,}2$

c) $3^{x^2-2} = 0{,}333$

d) $4^{x^2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

e) $\sqrt{3^{x^2-5}} = \frac{1}{27}$

5. Resolve as equações:

a) $2^x + 2^{x+1} = 12$

b) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

c) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

d) $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + 2^{3x+1} = 120$

e) $3^x = 7^x$

f) $5^x = 3^{2x}$

Actividades

6. Resolve as equações seguintes:
   a) $3^{4-x^2} = 27$
   b) $8^{6x-10} = \frac{1}{2^{3x}}$
   c) $\sqrt{6^x} = \frac{1}{36}$
   d) $a^{2\cos x + 1} = 1$

7. Resolve as seguintes equações:
   a) $9^x + 9^{x+1} = 270$
   b) $7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2} + 7^{x-3} = 400$
   c) $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + 2^{3x+1} = 30$

8. Resolve as seguintes equações:
   a) $9^x + 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$
   b) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$
   c) $3^{4x} - 5 \cdot 9^x - 36 = 0$
   d) $5 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 3\,456 = 0$
   e) $2^{2x} - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$
   f) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

9. Resolve as seguintes equações:
   a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$
   b) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$
   c) $\sqrt{9^{3x-2}} = \sqrt[3]{27^{2+x}}$
   d) $a^{(1-x)(x-2)} = \frac{1}{a^2}$
   e) $\sqrt{a^{x-1}} \cdot \sqrt{a^{2x-1}} \cdot \sqrt[4]{a^{2-2x}} = 1$
   f) $\sqrt[x^2+1]{27^{5x^2-3}} = \sqrt[3x^2+1]{27^{5-x^2}}$

10. Se $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$, qual é o valor de x?
    a) -2 e -3 b) -2 e 3 c) 2 e 3 d) 1 e 2

11. Se $8 \cdot 2^{x-1} + 27 \cdot 3^{x-1} = 2 \cdot 3^{x+2}$, qual é o valor de x?
    a) 1 b) -3 c) -2 d) 2

12. Se $2^x + 2^{-x} = a$, o valor de $8^x + 8^{-x}$ é igual a:
    a) $a^3 + 3a$ b) $a^3 - 3a$ c) $a^{-3} + 3a$ d) $4a$

13. O valor de x na equação $a^{\frac{1-2x}{2}} = a^{\frac{1-7x}{3}}$ é:
    a) $\frac{1}{8}$ b) 8 c) $-\frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{4}$

14. Resolve as inequações seguintes:
    a) $\left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{27}{125}$
    b) $\sqrt{8^{x-1}} \leq \sqrt[3]{4}$
    c) $3^{2x+3} + 3^{x+1} - 4 > 0$
    d) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 < 0$
    e) $25^x - 24 \leq 10 \cdot 5^{x-1}$
    f) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} < 0$
    g) $3^{-x} + 3^x - \frac{10}{3} > 0$

Actividades

15. Esboça, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = 4^x$ e $g(x) = (\frac{1}{4})^x$.
   a) Resolve graficamente $4^x > (\frac{1}{4})^x$.

16. Esboça, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $h(x) = 2^{x+1}$ e $m(x) = 2^{x-1}$.
   a) Resolve graficamente $2^{x+1} \geq 2^{x-1}$.

17. Resolve graficamente as inequações exponenciais seguintes:
   a) $3^{x-1} > 3$
   b) $(\frac{2}{3})^{2x-1} \geq (\frac{3}{2})^{3-\frac{2x}{5}}$

18. Resolve analiticamente as seguintes inequações:
   a) $(\frac{2}{3})^{2x-1} \geq (\frac{2}{3})^{3-\frac{2x}{5}}$
   b) $(\frac{1}{3})^{3x-1} \geq 3^{-x}$
   c) $(0{,}02)^{3x} \geq (0{,}02)^{2x-2}$

19. Resolve as inequações:
   a) $5^{x^2-x} \leq 5^{-3}$
   b) $(\frac{2}{3})^{x^2} \geq (\frac{4}{9})^{\frac{x}{2}+1}$
   c) $3^{\frac{x^2-2x}{2}} \geq (\sqrt{3})^{-1}$
   d) $2^x - 10^x > 0$

20. Qual é a solução da inequação $(\frac{1}{2})^{x^2+5x+1} \geq (\frac{1}{2})$?
   a) $-5 \leq x \leq 0$
   b) $x \leq -5$ ou $x \geq 0$
   c) $x \geq 0$
   d) $x \leq 0$

21. Seja a um número positivo e diferente de 1. A solução da inequação $a^{x-1} \leq 1$ é o conjunto dos números tais que:
   a) $x \leq 1$ se $a > 1$
   b) $x \geq 1$ se $a > 1$
   c) $0 < x < 1$ se $a > 1$
   d) $-1 < x \leq 0$ se $a > 1$

22. Resolve as seguintes inequações:
   a) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 \leq 0$
   b) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \geq 0$
   c) $(\frac{1}{2})^{2x} - 3 \cdot 2^{-x} + 2 \geq 0$
   d) $2 \cdot (\frac{1}{2})^{2x} - 3 \cdot (\frac{1}{2})^x + 1 \geq 0$
   e) $10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 \leq 0$

Actividades

23. Resolve as equações:

a) $6^{2x} - 7 \cdot 6^{x} + 6 = 0$

b) $2^{x} + 2^{2x-3} - \frac{5}{2} = 0$

c) $10 = 3 \cdot 9^{x} + 7 \cdot 3^{x}$

d) $3^{2x-1} - 3^{x} - 3^{x-1} + 1 = 0$

e) $3^{x} + 9^{x} = 90$

f) $(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}})^{-x} + (\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}})^{x} = 6$

g) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

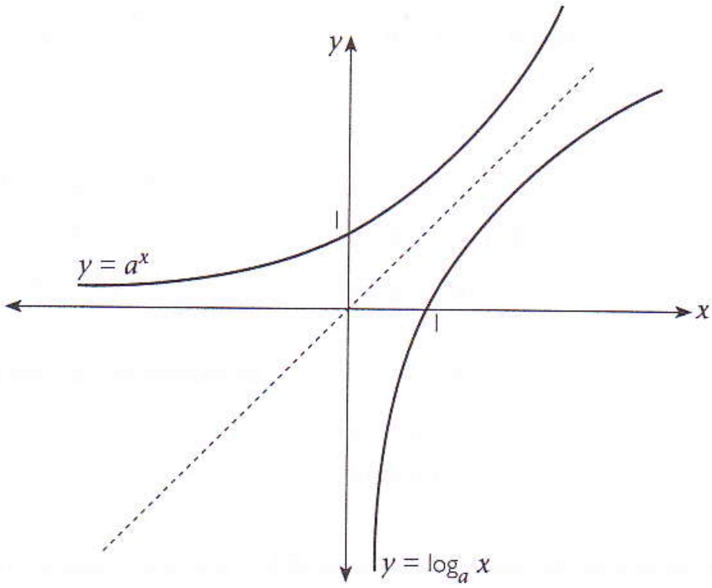
Unidade 4

Equações e inequações logarítmicas

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar equações e inequações logarítmicas;
- resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações logarítmicas;
- resolver situações reais do quotidiano que envolvem equações e inequações logarítmicas.

4.1 O logaritmo



Seja $b = a^x$, $(b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1)$.

Ao expoente x chama-se logaritmo de b na base a. Escreve-se assim: $x = \log_a b$

Isto é: $b = a^x \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Exemplos

$b = a^x \Leftrightarrow x = \log_a b$

$\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

4.1.1 Logaritmos decimais

Observa os logaritmos seguintes:

- $\log_{10} 5$
- $\log_{10} 0{,}5$

Todos têm base 10. Os logaritmos de base 10 chamam-se logaritmos decimais.

Nos logaritmos decimais, podemos omitir a base. Por defeito, qualquer logaritmo representado sem base é um logaritmo de base 10.

- $\log_{10} 5 = \log 5$
- $\log_{10} 0{,}5 = \log 0{,}5$
- $\log_{10} 2{,}54 = \log 2{,}54$

Como calcular logaritmos decimais?

Recorda a propriedade $\log_b a^p = p \log_b a$.

Exemplos

a) $\log_{10} 10^3$

$\log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$, porque $\log_{10} 10 = 1$.

b) $\log_{10} 10^{-5}$

$\log_{10} 10^{-5} = -5 \log_{10} 10 = -5 \cdot 1 = -5$.

c) $\log (0{,}0001)$

$\log (0{,}0001) = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4 \cdot 1 = -4$.

4.2 Mantissa e característica

Observa:

- $\log 252 = 2{,}4014$
- $\log 1{,}564 = 0{,}1942$
- $\log 324 = 2{,}5105$

Notaste, certamente, que os resultados são constituídos por uma parte inteira e uma parte decimal.

$$\log 324 = \underbrace{2}_{\substack{\text{parte inteira}\\ \text{(característica)}}},\underbrace{5105}_{\substack{\text{parte decimal}\\ \text{(mantissa)}}}$$

Característica (c): a parte inteira do logaritmo chama-se característica e representa-se normalmente por c; a característica pode ser positiva ou negativa.

Mantissa (m): a parte decimal do logaritmo chama-se mantissa e representa-se normalmente por m; a mantissa é sempre positiva.

Exemplo

$\log 0{,}016 = -1{,}7959 = -2 + 0{,}2041$

$c = -2$, porque o número 0,016 tem 2 zeros.

$m = 2041$, porque a mantissa de 0,016 é igual à mantissa de 16.

Conclusão

$\log x = c + 0, m$

O logaritmo de um número positivo x, quando não é potência de 10, expressa-se por $c + 0, m$.

4.2.1 Cálculo da característica

O cálculo da característica de um logaritmo decimal é baseado na seguinte propriedade:

Se $m < p < n$, então $\log m < \log p < \log n$.

Exemplo 1

Vamos calcular a característica de log 254, enquadrando 254 entre duas potências de 10:

$100 < 254 < 1000$

$10^2 < 254 < 10^3$

Isto é, $\log 10^2 < \log 254 < \log 10^3$

Recorda que $\log_b a^p = p \log_b a$, então:

$2 \log 10 < \log 254 < 3 \log 10$

$2 < \log 254 < 3$

Ou seja, log 254 é um número compreendido entre 2 e 3.

$\log 254 = 2, \ldots \Rightarrow c = 2.$

Exemplo 2

Vamos calcular a característica de log 4, enquadrando 4 entre duas potências de 10:

$1 < 4 < 10$

$\log 1 < \log 4 < \log 10$

$0 < \log 4 < 1$

Isto é, $\log 4 = 0, \ldots \Rightarrow c = 0.$

Exemplo 3

Vamos calcular a característica de log 25,4, enquadrando 25,4 entre duas potências de 10:

$10 < 25{,}4 < 100$

$1 < \log 25{,}4 < 2$

Isto é, $\log 25{,}4 = 1, \ldots \Rightarrow c = 1$.

Analisando os três exemplos, chega-se à seguinte conclusão:

A característica de um número maior que 1 é igual ao número de algarismos do logaritmando da parte inteira, menos 1.

Como calcular a característica de log 0,0045?

Vamos enquadrar 0,0045 entre duas potências de 10:

$0{,}001 < 0{,}0045 < 0{,}01$

$10^{-3} < 0{,}0045 < 10^{-2}$

$-3 < \log 0{,}0045 < -2$

Isto é, $\log 0{,}0045 = -2{,}3468 = -3 + 0{,}6532 \Rightarrow c = -3$.

A característica de um número menor que 1 é igual ao número de zeros mais 1 que antecedem o primeiro algarismo não nulo, com sinal menos.

4.2.2 Cálculo da mantissa

A mantissa do logaritmo de um número determina-se com o auxílio de uma tábua de logaritmos. Podes encontrar uma tábua de logaritmos decimais nas páginas 72 e 73 do manual.

Exemplo

Qual é a mantissa de log 25?

Procura na tábua o número 25.

Vê a mantissa que está ao lado na coluna log. ($m = 3979$). Como o número de algarismos de 25 é $2 \Rightarrow c = -1$.

Logo, $\log 25 = 1{,}3979$.

4.2.3 Propriedades das mantissas

Observa os seguintes exemplos:

- $\log 3 = 0{,}4771$
- $\log 30 = 1{,}4771$
- $\log 0{,}03 = -2 + 0{,}4771 = -1{,}5229$
- $\log 0{,}003 = -3 + 0{,}4771 = -2{,}5229$

Nos números que se obtêm multiplicando ou dividindo o número dado por uma potência de 10, os seus logaritmos decimais conservam a mantissa.

4.2.4 Cálculo do logaritmo

Exemplo 1
Vamos calcular o valor de log 324.
log 324 = c + 0, m
c = 2 e m = 5105 (vê na tábua a mantissa de 324)
log 324 = 2,5105.

Exemplo 2
Vamos calcular o valor de log 254.
log 254 = c + 0, m
c = 2 e m = 4048 (vê na tábua a mantissa de 254)
log 254 = 2,4048.

Exemplo 3
Vamos calcular o valor de log 6.
log 6 = c + 0, m
c = 0 e m = 7781
log 6 = 0,7781.

ACTIVIDADES 1 A 5

4.3 Antilogaritmo de um número

O número x cujo logaritmo decimal é igual a m chama-se antilogaritmo de m. O domínio é $x > 0$.

Se log $x = m$, então x = antilog m.

Exemplo
Vamos calcular x sabendo que log x = 1,2553, $x > 0$. x = antilog = 1,2553.
A parte inteira do número procurado tem dois algarismos ($c = 1 \Rightarrow$ 2 algarismos).
Procura na tábua o valor numérico correspondente para m = 2553.
x = 18
Logo, log 18 = 1,2553.

4.4 Aplicação prática de logaritmos

Exemplo
Vamos calcular $x = \sqrt[5]{16,3}$.

$x = \sqrt[5]{16,3}$
$\log x = \log \sqrt[5]{16,3}$ Domínio: $x > 0$
$\log x = \log (16,3)^{\frac{1}{5}}$
$\log x = \frac{1}{5} \log 16,3$
como $\log 16,3 = 1,2122$
$\log x = \frac{1}{5} \cdot 1,2122$
$\log x = 0,2424$ (procura na tábua o valor de x)
$x = 1,7475$

4.5 Representação de logaritmos na forma mista

Nas operações envolvendo logaritmos, é conveniente trabalhar com logaritmos em que apareçam a característica e a mantissa. Por isso, costuma-se representar o logaritmo de um número x $(0 < x < 1)$ na forma mista (ou preparada), em cujo resultado aparecem a característica e a mantissa.

Exemplo 1
Vamos calcular $\log \frac{3}{100}$.
$\log \frac{3}{100} = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2 = -1,5229$
$\log 0,03 = -2 + 0,4771$.

Exemplo 2
Vamos escrever na forma mista o valor de log (0,0002).
como $c = -4$; $m = 3010$
então $\log (0,0002) = -4 + 0,3010$.

Exemplo 3
Vamos calcular o valor de x sabendo que $\log x = -1,5229$.
$\log x = -1,5229 = -1 - 0,5229$ Domínio: $x > 0$
Vamos escrever $\log x$ na forma mista.
$\log x = -1 + 1 - 1 - 0,5229$
$\log x = -2 + 1 - 0,5229$
$\log x = -2 + 0,4771$
Consultando a tábua, conclui-se que $x = 0,03$ $(\log 0,03 = -1,5229)$
Atenção:
$-1,5229 \neq -1 + 0,5229$
$-1,5229 = -2 - 0,4771$

ACTIVIDADES 6 A 11

4.6 Equação logarítmica

Observa as expressões seguintes.

- $\log_2 x = 4$
- $\log_2 x = 3$
- $\log_3 (x^2 - 3) = 0$

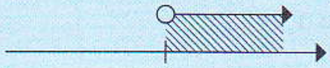
Estas expressões são equações que envolvem logaritmos. São, por isso, equações logarítmicas.

Exemplo 1

$\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$

$S = \{16\}.$

Domínio: $x > 0$

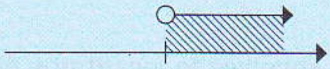


Exemplo 2

$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

$S = \{8\}.$

Domínio: $x > 0$



Exemplo 3

$\log_3 (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 3^0$

$x^2 - 3 = 1$

$x^2 = 4$

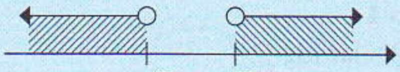
$x = \pm 2$

$S = \{-2; +2\}.$

Domínio: $x^2 - 3 > 0$

$x^2 > 0$

$x > \sqrt{3} \vee x < -\sqrt{3}$



4.6.1 Resolução de equações logarítmicas

Equações do tipo $\log_{g(x)} f(x) = m$

A resolução de equações deste tipo baseia-se na definição de logaritmos.

$\log_{g(x)} f(x) = m \Rightarrow f(x) = [g(x)]^m,\ g(x) > 0,\ f(x) > 0,\ g(x) \neq 1.$

Exemplo

$\log_3 (x^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3^1$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$S = \{-2, +2\}.$

Domínio: $x^2 - 1 > 0$

$x^2 > 1$

$x > 1 \vee x < -1$

Equações do tipo $\log_c g(x) = \log_c f(x)$

A resolução deste tipo de equações segue, em geral, os seguintes passos:

1.° passo: Determinam-se as condições de existência:
Domínio: $g(x) > 0$ e $f(x) > 0$ se $c > 0$ e $c \neq 1$.

2.° passo: Resolve-se a equação aplicando a propriedade:
$\log_a d = \log_a b \Leftrightarrow d = b$.

3.° passo: Verifica-se a pertença da solução ao domínio da equação.

Exemplo

$\log_4 (2x - 9) = \log_4 3 \Leftrightarrow 2x - 9 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{12}{2} \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$.

Domínio: $2x - 9 > 0$

$x > \frac{9}{2}$

Equações do tipo $\log_{a^2} x + \log_a x + c = 0$

Estas equações, com $a > 0$, $a \neq \pm 1$ e $x > 0$, resolvem-se fazendo uma mudança da incógnita e observando o 3.° passo do exemplo anterior. É preciso lembrar que $\log_{a^2} x = (\log_a x)^2$.

Exemplo

Vamos resolver a equação:

$(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$

$(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$ Domínio: $x > 0$

seja $\log_2 x = t \Rightarrow$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = 1 \vee t = 2$

se $t = 1$ teremos $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \Rightarrow x = 2$

se $t = 2$, teremos $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$

$S = \{2, 4\}$.

ACTIVIDADES 12 A 15

Equações que envolvem a mudança de base

Exemplo

Vamos resolver a equação:

$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$

Vamos mudar os dois logaritmos para base a:

$\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{\log_a x}{2 \log_a a} = \frac{1}{2} \log_a x$

$\log_{x^2} a = \frac{\log_a a}{\log_a x^2} = \frac{1}{2 \log_a x}$

A equação fica então assim:

$\frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{2 \log_a x} - 1 = 0$ Domínio: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq \pm 1$, $x \neq \pm 1$

Fazendo $\log_a x = t$, temos:

$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} - 1 = 0$

$(t) \quad (1) \quad (2t)$

$t^2 + 1 - 2t = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$ logo $\log_a x = 1 \Rightarrow x = a$

$S = \{a\}$, desde que $a > 0$ e $a \neq \pm 1$.

4.7 Inequações logarítmicas

Observa os exemplos seguintes.

Exemplos

a) $\log_2 x > 3$

$\log_2 x > 3 \Rightarrow x > 2^3$ Domínio: $x > 0$

$x > 8$.

b) $\log_x 4 < 2$

$\log_x 4 < 2 \Rightarrow 4 < x^2$

$x > 2 \vee x < -2$ Domínio: $x > 0 \wedge x \neq 1$

$x > 2$.

c) $\log_2 (x^2 - 3) < 0$

$x^2 - 3 < 1$

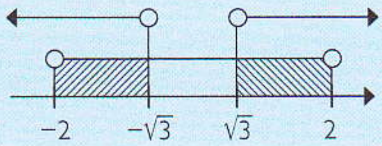
$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) < 0$

$S = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{3} > x > -2 \vee 2 > x > \sqrt{3}\}$ ou

$S = x \in \mathbb{R}:]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2[$

Domínio: $x^2 > 3$

$x > \sqrt{3} \vee x < -\sqrt{3}$



Nota que todas as desigualdades envolvem logaritmos. Estas desigualdades chamam-se inequações logarítmicas.

4.7.1 Propriedades das inequações logarítmicas

Se $0 < b < 1$, então $\log_b a > \log_b c \Rightarrow a < c$.

De dois logaritmos com a mesma base ($0 < b < 1$), é maior o que tiver menor logaritmando:

$\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 9$ porque $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ e $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

Se $b > 1$, $\log_b a > \log_b c \Rightarrow a > c$.

De dois logarítmos com a mesma base ($b > 1$), é maior aquele que tiver maior logaritmando:

$\log_3 27 > \log_3 9$ porque $\log_3 27 = 3$ e $\log_3 9 = 2$.

Observa os seguintes exemplos.

Exemplo 1

$\log_5 (3x - 1) < \log_5 x$

$3x - 1 < x$

$3x - x < 1$

$2x < 1$

$x < \frac{1}{2}$

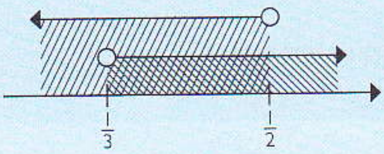
Domínio:

$3x - 1 > 0$ e $x > 0$

$x > \frac{1}{3}$ e $x > 0$

$x > \frac{1}{3}$

Vamos representar as duas desigualdades num gráfico para vermos a solução final:



O conjunto-solução é a intersecção da solução parcial com o domínio.

$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$.

Exemplo 2

$\log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$

$-x^2 + 5x < 6$

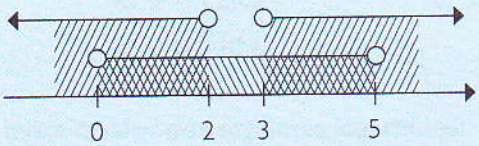
$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x < 2$ ou $x > 3$

Domínio:

$-x^2 + 5x > 0$

$0 < x < 5$



O conjunto-solução é a intersecção da solução parcial com o domínio.

S: $\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2 \vee 3 < x < 5\}$.

ACTIVIDADES 16 E 17

4.7.2 Resolução de problemas concretos aplicando logaritmos

As equações e inequações logrítmicas permitem-nos resolver problemas de situações reais do quotidiano.

Exemplo
Vamos calcular o raio de uma esfera cujo volume é 358 cm^3.

O volume de uma esfera de raio r é igual a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Isolando r, temos: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Logaritmizar: $\log r = \log \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

$\log r = \log \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\log r = \frac{1}{3} \log \frac{3V}{4\pi}$

$3 \log r = \log 3V - \log 4\pi$

$3 \log r = \log 3 + \log V - \log 4 - \log\pi$

$3 \log r = \log 3 + \log 358 - \log 4 - \log (3{,}14)$

$3 \log r = 0{,}4771 + 2{,}5539 - 0{,}6021 - 0{,}4969$

$\log r = 0{,}6440.$

Nota:
$\log 3 = 0{,}4771$
$\log 358 = 2{,}5539$
$\log 4 = 0{,}6021$
$\log (3{,}14) = 0{,}4469$

Calculando o antilogaritmo, teremos:
$r = 4{,}4048$ cm.

ACTIVIDADES 18 A 23

Actividades

1. Escreve os logaritmos seguintes na forma $c + 0{,}m$:
   a) log 53
   b) log 0,561
   c) log 925
   d) log 252

2. Indica a característica de:
   a) log 0,4
   b) log 0,00378
   c) log 0,0003
   d) log 0,089

3. Calcula os logaritmos seguintes:
   a) log 5
   b) log 50
   c) log 312
   d) log 890

4. Calcula os logaritmos seguintes:
   a) log 0,015
   b) log 0,50
   c) log 0,027
   d) log 0,000823

5 Calcula o logaritmo dos números:
   a) 165
   b) 17,54
   c) 0,4367
   d) 5 379 000

6. Calcula o valor de x nos seguintes casos:
   a) $\log x = 3{,}4254$
   b) $\log x = 2{,}5491$
   c) $\log x = 0{,}3214$
   d) $\log x = 1{,}1761$
   e) $\log x = 3{,}4623$

7. Calcula os números cujos logaritmos são:
   a) $\log x = 0{,}686$
   b) $\log x = 2{,}5102$
   c) $\log x = 1{,}7286$

8. Calcula x, sabendo que:
   a) $\log x = -2{,}3002$
   b) $\log x = -2{,}3979$
   c) $\log x = -2{,}1244$
   d) $\log x = -1{,}2631$

9. Calcula, usando logaritmos, o valor de x em cada caso:
   a) $x = 1{,}21^6$
   b) $x = \sqrt[5]{18{,}3}$
   c) $x = \sqrt{26{,}3}$
   d) $x = \sqrt[3]{10{,}6}$
   e) $x = 3{,}2^{15}$

10. Escreve na forma mista o valor dos seguintes logaritmos:
   a) log 0,006
   b) log 0,0003
   c) log 0,0025

Actividades

11. Calcula o valor de x, sabendo que:

a) $\log x = -2{,}3002$

b) $\log x = 3{,}4623$

c) $\log x = -3{,}3979$

d) $\log x = 1{,}1761$

12. Resolve as equações seguintes:

a) $\log_{(x-2)}(x + 4) = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3)$

c) $\log_2 (x^2 - x + 4) - \log_2 (x + 1) = 1$

d) $\log_x (4 - 3x) + 2$

e) $\log_2 (x - 2) = \log_2 (x^2 - x + 6) + \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1)$

f) $\log_3 (x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 1) = \log_3 (x - 4)$

g) $\log_{(x+1)}(x^2 - x + 2) + 1$

h) $\dfrac{\log_2 (2x)}{\log_2 (4x - 15)} = 2$

13. Resolve as equações seguintes:

a) $\log_4^2 x - 2 \log_2 x + 3 = 0$

b) $6 \log_2^2 x - 7 \log_2 x + 2 = 0$

c) $3 \log_3 x + 2 = \dfrac{1}{\log_3 x}$

d) $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0$

e) $\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 = 0$

f) $\log_6^2 x - 5 \log_6 x + 6 = 0$

14. Resolve as seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 1$

b) $\log_2 (x + 2)(3x - 4) = 4$

c) $\log_4 [\log_3 (\log_2 x)] = \frac{1}{2}$

d) $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$

e) $\log_{16x} x^2 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$

f) $\dfrac{1}{5 + \log x} + \dfrac{2}{1 + \log x} = 1$

15. Resolve os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_{xy} (x - y) = 1 \\ \log_{xy} (x + y) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x-y} = 8 \\ \log_2^x - \log_2^y = 2 \end{cases}$

Actividades

16. Resolve as seguintes inequações logarítmicas:

a) $\log_5 (3 - x) < -1$

b) $25^x - 2^{2 \log_2 6} - 1 < 10 \cdot 5^{x-1}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 6x + 18) < 2 \log_{\frac{1}{3}} (x - 4)$

d) $\log_4 < -\frac{1}{2}$

17. Resolve as inequações seguintes:

a) $\log_2 (2x - 6) < 3$

b) $\log_4 (5x + \frac{1}{3}) > 2$

c) $\log_3 \frac{x+2}{3} + 1 < \log_3 (2x - 1)$

d) $\log_3 (x^2 + 6x) > \log_3 7$

e) $\log (3x^2 - x + 1) \leq \log (x^2 - 2x + 2)$

f) $\log (3x - 5) \leq \log (x - 1)$

18. Calcula o raio de uma esfera cujo volume é 358 cm^3.
(Nota: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$)

19. Calcula o raio de uma esfera cujo volume é 256 cm^3.

20. Um corpo cai de altura h = 343 m, sujeito apenas à acção da gravidade. Determina o tempo da queda sabendo que $h = \frac{1}{2} gt^2$, onde g = 9,8 m/s^2 é a aceleração de gravidade, t o tempo gasto na queda e h o espaço percorrido.

21. Calcula o tempo t de oscilação de um pêndulo simples de comprimento l = 100 cm. O tempo de oscilação é dado pela expressão:
$t = \pi\frac{l}{g}$ onde g = 9,80 m/s^2 e π = 3,14.

22. O senhor Sumbane deposita 5000 meticais a 4% de juros ao ano. Quanto terá, após 10 anos, se o juro é pagável trimestralmente?
(O valor procurado é dado pela expressão $y = x(1 + \frac{i}{k})^{nk}$, onde k é o número de trimestres por ano, n é o tempo em anos e x o depósito.

23. As marcações R_1 e R_2 de dois terramotos, na escala de Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log (\frac{M_1}{M_2})$, onde M_1 e M_2 medem a energia libertada pelos terramotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terramotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Determina a razão $\frac{M_1}{M_2}$.

Tabelas de logaritmos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.0000	.0143	.0086	.0128	.0170	.0212	.0523	.0294	.0334	.0374
11	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
12	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
13	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
14	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
15	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
16	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
17	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
18	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
19	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
20	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
21	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3865	.3385	.3404
22	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
23	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
24	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
25	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4062	.4082	.4099	.4116	.4133
26	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
27	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
28	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
29	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
30	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
31	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
32	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5182	.5145	.5159	.5172
33	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
34	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
35	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
36	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
37	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
38	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
39	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
40	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
41	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
42	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
43	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
44	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
45	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
46	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
47	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
48	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
49	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
50	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
51	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7315	.7143	.7152
52	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
53	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
54	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
56	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
57	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
58	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
59	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
60	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
61	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
62	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
63	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
64	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
65	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
66	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
67	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
68	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
69	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
70	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
71	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
72	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
73	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8699	.8675	.8681	.8686
74	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
75	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
76	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
77	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
78	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
79	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
80	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
81	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
82	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
83	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
84	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
85	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
86	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
87	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
88	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
89	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
90	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
91	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
92	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
93	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
94	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
95	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
96	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
97	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
98	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
99	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

Unidade 5

Geometria analítica no plano

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

- aplicar vectores na resolução de problemas;
- escrever as coordenadas e componentes de um vector no plano;
- escrever um vector como a diferença de dois pontos;
- determinar a soma de um ponto com um vector e a soma de dois vectores;
- determinar o produto de um número real por um vector;
- determinar a norma de um vector no plano;
- determinar um vector colinear com o outro;
- resolver problemas envolvendo os conceitos de norma e colinearidade entre vectores;
- calcular a distância entre dois pontos;
- identificar a equação da recta;
- determinar o declive de uma recta;
- escrever a equação da circunferência, conhecido o centro e o raio;
- resolver problemas envolvendo circunferências;
- identificar o centro da circunferência e o raio dada a respectiva expressão analítica;
- interpretar a condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives;
- determinar o ponto médio de um segmento através da fórmula;
- determinar os pontos de intersecção de duas rectas;
- calcular a distância de um ponto a uma recta;
- definir elipse e identificar os seus elementos;
- escrever a equação de uma elipse com centro na origem dos eixos de coordenadas;
- aplicar a equação da elipse na resolução de problemas.

5.1 Introdução à geometria analítica do plano

A essência da geometria analítica (não estamos ainda a restringir-nos ao plano) está no uso de métodos algébricos para resolução de problemas geométricos. Este método trouxe a fusão do pensar puramente geométrico (também denominado método sintético) com o pensar algébrico. Por essa razão, na geometria analítica estaremos sempre perante situações que nos levam a raciocinar geométrica e algebricamente. A apresentação marcante do método analítico para a resolução de problemas geométricos é atribuída ao matemático francês René Descartes (1596–1650), na sua obra *Discurso do Método*, publicada em 1637. Foi Descartes quem introduziu o **sistema de coordenadas cartesiano**, com o qual já trabalhaste nas classes anteriores. Neste capítulo, usaremos sempre o sistema de coordenadas cartesianas, pois nunca trataremos a geometria analítica sem fazer uso de um sistema de referência.

5.2 Aplicação de vectores

Um dos conceitos básicos em álgebra linear, que nos vai ajudar a estudar a geometria analítica do plano, é o de **espaço vectorial** ou **espaço linear**. Comecemos por apresentar o elemento fundamental do espaço vectorial – o vector. Um vector é um elemento geométrico que fica definido pela sua magnitude (ou comprimento), direcção e sentido.

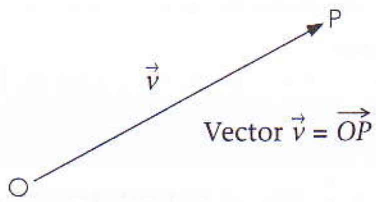


Figura 1.

Simbolizaremos um vector com letra minúscula com seta por cima da letra. Por exemplo, na figura 1, o vector é simbolizado por $\vec{v}$. Em alguns casos, os vectores são designados pelas letras que definem as suas extremidades; por exemplo, $\overrightarrow{OP}$, onde o ponto O é a origem do vector e P é a extremidade.

O comprimento ou magnitude (também denominado valor absoluto ou módulo) do vector é simbolizado por $|\vec{v}|$ ou por $\|\vec{v}\|$.

5.2.1 Vector unitário

Dizemos que um vector $\vec{u}$ é unitário se o seu comprimento é 1, isto é, quando $|\vec{u}| = 1$. Se $\vec{v}$ não é o vector nulo, então o vector $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ é o vector unitário na direção de $\vec{v}$. Qualquer vector na direção de $\vec{v}$, de mesmo sentido ou sentido oposto, é um múltiplo escalar deste vector unitário $\vec{u}$.

5.3 Coordenadas de um vector

Se a origem de um sistema de coordenadas xy coincide com a origem do vector, verifica-se que este vector é igual à soma dos vectores formados pelas suas projecções em cada eixo.

Observando a figura 2, temos:

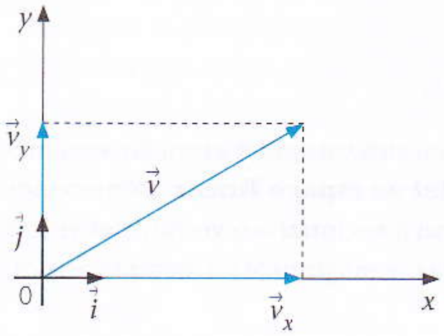


Figura 2: Componentes do vector.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Ou seja, os vectores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ são os **componentes** do vector no sistema de coordenadas.

No sistema cartesiano, designa-se frequentemente o vector unitário na direcção do eixo dos x por $\vec{i}$, e o vector unitário na direcção do eixo dos y por $\vec{j}$. Assim, qualquer vector pode ser expresso com base nestes vectores.

Se $\vec{u}$ é um vector unitário no sistema e designando os componentes de $\vec{u}$ por $\vec{u}_x = \vec{i}$ e $\vec{u}_y = \vec{j}$, então temos:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Os escalares v_x e v_y são as coordenadas do vector no sistema. Pode-se representar $\vec{v} = (v_x; v_y)$.

Doravante, usando coordenadas dos vectores, podemos operar não só geometricamente mas também analiticamente.

Exemplo

Considera o vector $\vec{v} = (-3, 2)$. O módulo do vector $\vec{v}$ é dado por $\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + 2^2}$ $= \sqrt{13}$

O vector unitário será dado por $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (-3, 2) = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

5.4 Espaço vectorial planar

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e V um conjunto não vazio de vectores em que se verificam as seguintes regras de operação, relativas à adição e à multiplicação por número real, isto é:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\vec{u} \in \mathbb{R}$

Então V chama-se **espaço vectorial** sobre $\mathbb{R}$ se se cumprem as regras seguintes.

Em relação à adição:

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; ou seja, a adição de vectores é associativa;
- $\exists \vec{o} \in V$: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ para todo $\vec{u}$; ou seja, na adição de vectores existe o elemento neutro;
  $\forall \vec{u} \in \vec{V}, \exists(-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$; ou seja, na adição de vectores existe o elemento simétrico;
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; ou seja, a adição de vectores é comutativa.

Em relação à multiplicação:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in V$: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in V$: $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;
- $\forall \vec{u} \in V$, $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Estas regras são aplicadas num espaço vectorial de qualquer dimensão. Uma vez que estamos a estudar a geometria analítica do plano, iremos trabalhar no espaço vectorial planar, ou seja, no espaço vectorial de duas dimensões.

5.5 Operações com vectores

Existem duas operações básicas envolvendo vectores: a adição e a multiplicação por um escalar, isto é, por um número real.

5.5.1 Adição de dois vectores

Há dois métodos geométricos para realizar a adição de dois vectores.

- **Método da triangulação** – consiste em colocar a origem do segundo vector coincidente com a extremidade do primeiro vector; o vector soma (ou vector resultante) é o que fecha o triângulo (origem coincidente com a origem do primeiro e extremidade coincidente com a extremidade do segundo). (Figura 3)

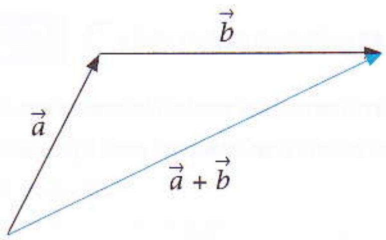


Figura 3: Adição de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pelo método da triangulação.

- **Método do paralelogramo** – consiste em colocar as origens dos dois vectores coincidentes e construir um paralelogramo. O vector soma (ou vector resultante) será dado pela diagonal do paralelogramo cuja origem coincide com a dos dois vectores. A outra diagonal será o vector diferença.

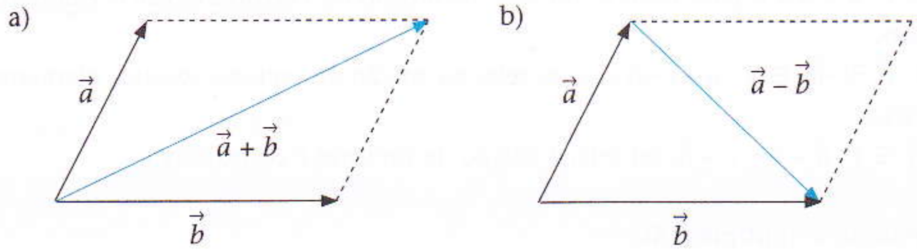


Figura 4: a) Adição de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pelo método do paralelogramo.
b) A diferença de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pelo método do paralelogramo.

5.5.2 Multiplicação por um escalar

A multiplicação ou divisão de um vector por um escalar resulta em vectores paralelos, na mesma linha ou não, com módulos e sentidos alterados pelo multiplicador ou divisor.

- $\alpha\vec{v}$ – tem o mesmo sentido e direcção de $\vec{v}$ se $\alpha > 0$;
- $\alpha\vec{v}$ – tem a mesma direcção de $\vec{v}$ e sentido oposto se $\alpha < 0$;
- $|\alpha\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$

Vejamos exemplos de multiplicação e divisão de um vector por escalares.

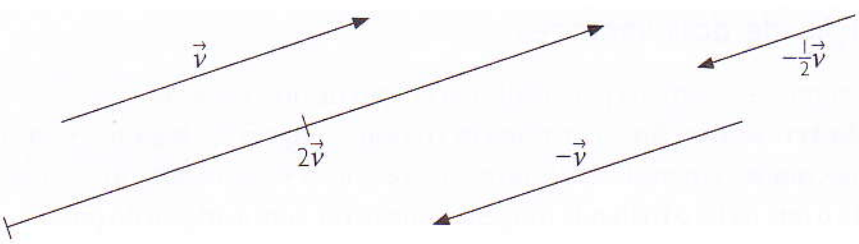


Figura 5: Multiplicação de um vector por um escalar.

Considerando os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na figura 6, vamos determinar as coordenadas e o esboço do vector $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

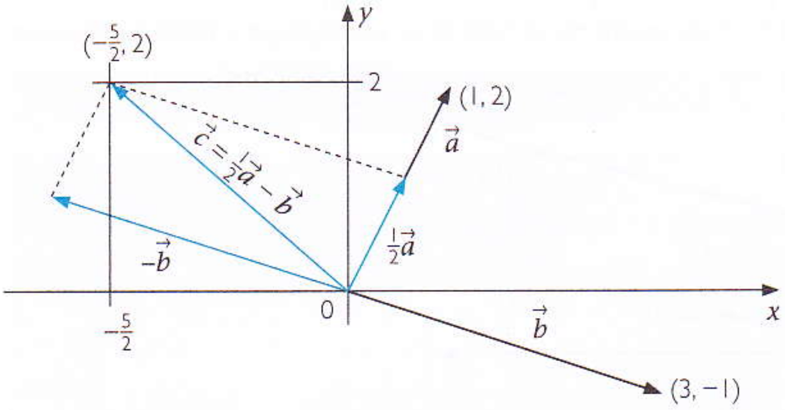


Figura 6: Esboço e coordenadas de $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

5.5.3 Adição de vectores em coordenadas

Seja $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$, então:

$\vec{v} + \vec{u} = (v_x + u_x; v_y + u_y)$

$\vec{v} - \vec{u} = (v_x - u_x; v_y - u_y)$

Exemplos

a) $\vec{v} = (1, 2); \vec{u} = (3, -1)$

$\vec{v} + \vec{u} = (1 + 3, 2 - 1) = (4, 1)$

b) $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 1); \vec{b} = (3, -1)$

$\vec{a} - \vec{b} = (\frac{1}{2} - 3, 1 + 1) = (-\frac{5}{2}, 2)$

ACTIVIDADES 1 A 7

5.6 Equações da recta no plano

A recta no plano pode ser representada de várias formas. Aqui iremos estudar como representar a recta no plano mediante equações usando o referencial cartesiano. Veremos também as posições relativas de duas rectas no plano, bem como as condições relativas para os casos especiais de paralelismo e de perpendicularidade.

5.6.1 Equação vectorial da recta

Seja r uma recta que passa pelo ponto A e tem a direcção de um vector não nulo $\vec{v}$ (figura 7).

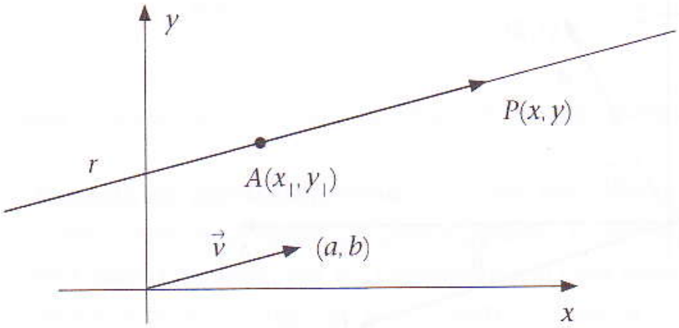


Figura 7: Equação vectorial da recta.

Para que um ponto P do espaço pertença à recta r, é necessário e suficiente que os vectores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, isto é:

(1) $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, com $t \in \mathbb{R}$

ou

(2) $P - A = t\vec{v} \Leftrightarrow P = A + t\vec{v}$

De onde temos:

(3) $(x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b)$

se $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (a, b)$.

Qualquer uma das equações (1), (2) ou (3) é denominada equação vectorial da recta r.

Exemplo

Determina a equação vectorial da recta r que passa pelo ponto $A(3, -5)$ e tem a direcção do vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Designando por $P(x, y)$ um ponto genérico dessa recta, tem-se:

$P = A + t\vec{v}$,

isto é,

$(x, y) = (3, -5) + t(2, 2)$.

Determina um ponto desta recta.

Quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$, P descreve a recta r. Assim, se, por exemplo, $t = -3$, então temos:

$(x, y) = (3, -5) + (-3)(2, 2)$

$(x, y) = (3, -5) + (-6, -6)$

$(x, y) = (-3, -11)$

Isto significa que o ponto $P(-3, -11)$ é um ponto da recta r.

5.6.2 Equação reduzida da recta

Dado o **coeficiente angular** a e o **coeficiente linear** b de uma recta, então poderemos obter a equação da recta através de sua equação reduzida dada por:

$$y = ax + b$$

Exemplo

Se $a = 2$ e $b = -1$, então a recta é dada por $y = 2x - 1$ (figura 8).

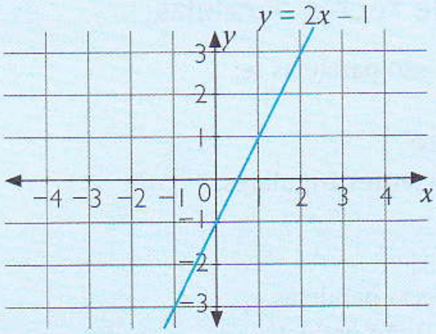


Figura 8: Recta $y = ax + b$ para $a = 2$ e $b = -1$.

5.6.3 Equação ponto-declividade de uma recta

Uma recta que passa por um ponto $P(x_0, y_0)$ e tem declividade, ou seja, coeficiente angular a, é dada por:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Exemplos

a) Se $P(1, 5)$ pertence a uma recta que tem coeficiente angular $a = 8$, então a equação da recta é $y - 5 = 8(x - 1)$.

b) Se uma recta passa pela origem e tem coeficiente angular $a = -1$, então a sua equação é dada por $y = -x$.

5.6.4 Equação da recta que passa por dois pontos

Se dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não estão alinhados verticalmente, podemos obter a equação da recta que passa por estes pontos com:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

onde $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Exemplo

Sejam dados os seguintes pontos (1, 2) e (3, –4). Determina a recta que passa nesses pontos.

Teremos como coeficiente angular o seguinte valor: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 2}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Então, a equação desejada será:

$y - 2 = -3(x - 1)$ ou $y - (-4) = -3(x - 3) \Leftrightarrow y + 4 = -3(x - 3)$.

ACTIVIDADES 8 E 9

5.6.5 Equações de rectas paralelas

Duas rectas no plano são paralelas se:

- ambas são verticais;
- ambas são horizontais;
- têm os mesmos coeficientes angulares.

Exemplos

- $x = -1$ e $x = 2$ são rectas paralelas.
- As rectas $y = 3$ e $y = 0$ são paralelas.
- As rectas $y = 2x + 5$ e $y = 2x - 3$ são paralelas.

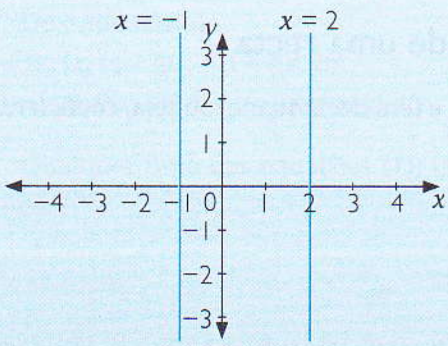


Figura 9.

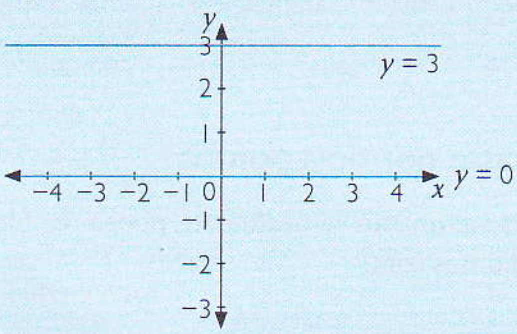


Figura 10.

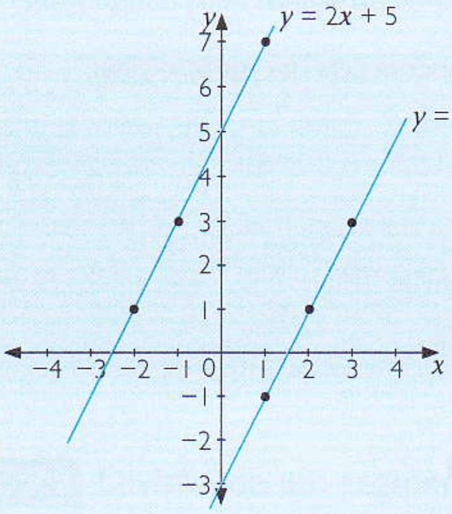


Figura 11.

5.6.6 Equações de rectas perpendiculares

Duas rectas no plano são perpendiculares se uma delas é paralela ao eixo dos x e a outra é paralela ao eixo dos y, ou se elas têm coeficientes angulares k' e k'' tal que $k'k'' = -1$.

Exemplos

As rectas $x = 3$, $y = -1$ são perpendiculares, pois $x = 3$ é paralela ao eixo dos y e $y = -1$ é paralela ao eixo dos x.

As rectas $y = x + 2{,}5$ e $y = -x + 1$ são perpendiculares, pois $k' = 1$, $k'' = -1$ e $k'k'' = -1$.

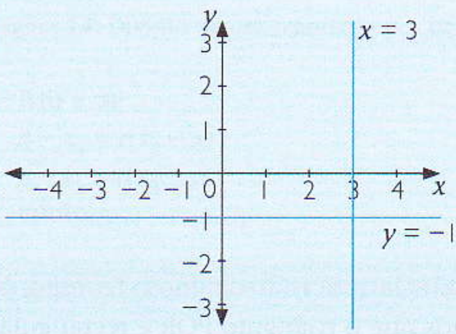


Figura 12.

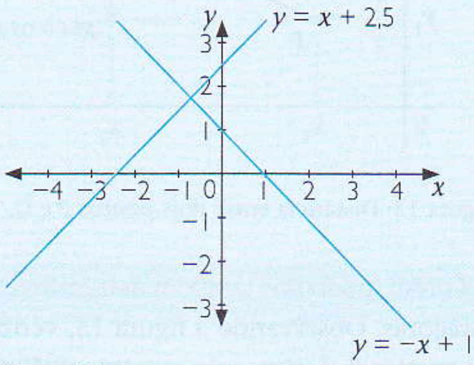


Figura 13.

ACTIVIDADES 10 E 11

5.6.7 Equação geral da recta

Toda a recta no plano cartesiano pode ser escrita pela sua equação geral:

$ax + by + c = 0$

Exemplos
Se $a = -1$, $b = 1$ e $c = -1$, tem-se a recta $-x + y - 1 = 0$.
Se $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$, tem-se a recta $y = 0$.
Se $a = 1$, $b = 0$ e $c = 5$, tem-se a recta $x + 5 = 0$.

5.7 Pontos e segmentos

Na relação de pontos e segmentos de recta, há três conceitos a abordar:

- a distância entre dois pontos no plano;
- a divisão de um segmento por uma razão dada;
- a distância de um ponto a uma recta.

5.7.1 Distância entre dois pontos

A distância d entre dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ no plano pode ser dada pelo módulo do vector $\overrightarrow{PQ}$, isto é, $d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ (figura 13).

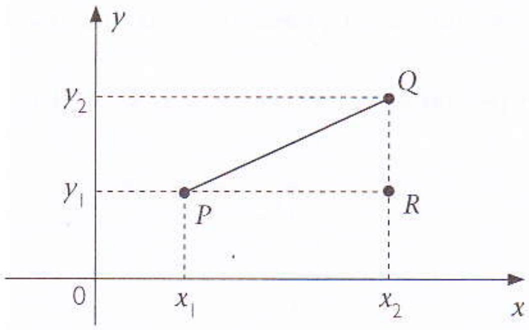


Figura 13: Distância entre dois pontos P e Q.

Porém, podemos também determinar a distância aplicando o famoso teorema de Pitágoras. Observando a figura 13, verificamos que o triângulo PQR é rectangular no vértice R. Assim, pelo teorema de Pitágoras, determinaremos a distância $d(P, Q)$ (que corresponde à hipotenusa) a partir das medidas dos catetos $\overline{PR} = (x_2, x_1)$ e $\overline{RQ} = (y_2, y_1)$, ou seja:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2$$
$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2}$$

Substituindo pelas coordenadas, obtemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo

Determina a distância d entre os pontos $P(0, 5)$ e $Q(-3, 1)$, aplicando a fórmula.

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(-3 - 0)^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

5.7.2 Divisão de um segmento por uma razão dada

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, diz-se que um ponto $P(x, y)$ divide o segmento de recta P_1P_2 na razão r, se

$$\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}$$

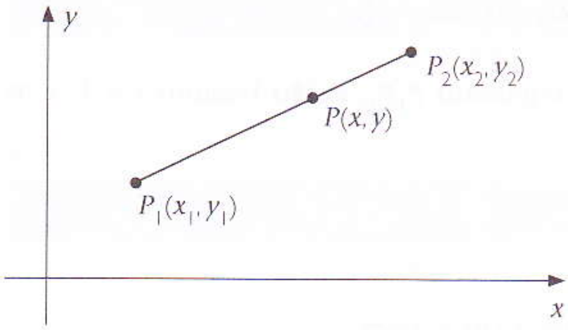


Figura 14: Divisão de um segmento por uma razão dada.

Isto é, se

$x - x_1 = r(x_2 - x)$

$y - y_1 = r(y_2 - y)$

então,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r},\ y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

em que (x, y) são as coordenadas do ponto P que divide o segmento de recta P_1P_2 na razão r.

Exemplo

Dados os pontos $P_1(2, -3)$ e $P_2(-6, 1)$, vamos determinar o ponto $P(x, y)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = \frac{1}{3}$.

As coordenadas do ponto são dadas por:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3}(-6)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2 - 2}{\frac{4}{3}} = 0,\ y = \frac{-3 + \frac{1}{3} \times 1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{8}{3} \times \frac{3}{4} = -2$$

Assim, as coordenadas do ponto procurado são (0, –2).

Tendo em conta o sentido vectorial do segmento P_1P_2, temos na figura 15 a ilustração do ponto P procurado.

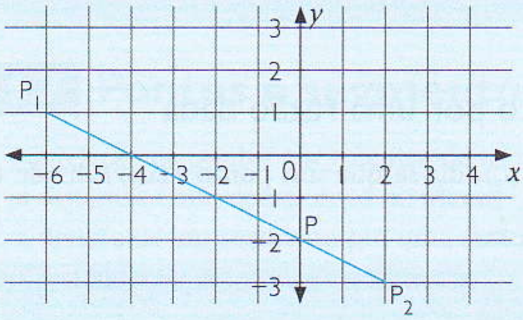


Figura 15: Divisão do segmento P_1P_2 dado, pela razão $r = \frac{1}{3}$.

Se $P(x, y)$ é o ponto médio do segmento P_1P_2, então teremos $r = 1$, e as coordenadas do ponto P serão:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

5.7.3 Distância de um ponto a uma recta

Seja um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma recta r no plano definida por:
$ax + by + c = 0$.

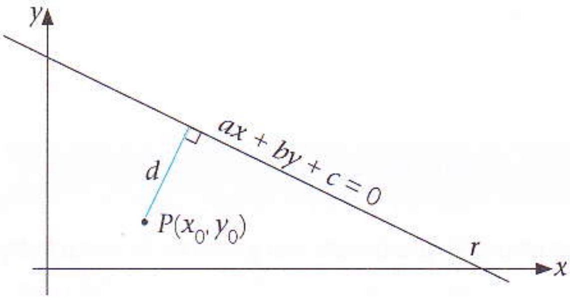


Figura 16: Distância de um ponto P a uma recta r.

A distância $d = d(P, r)$ do ponto $P(x_0, y_0)$ à recta r dada por $ax + by + c = 0$ pode ser obtida pela fórmula abaixo:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo

Calcula a distância do ponto (0, 0) à recta $5x + 12y + 25 = 0$.

$$d(P, r) = \frac{|5 - 0 + 12 - 0 + 25|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{25}{\sqrt{169}} = \frac{25}{13}.$$

ACTIVIDADES 12 A 16

5.8 Circunferência

O conjunto de todos os pontos que têm uma distância fixa r de um ponto fixo ***C*** chama-se **circunferência**. A distância ***r*** é o **raio** e o ponto ***C*** é o **centro**.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos facilmente encontrar a equação da circunferência (figura 17).

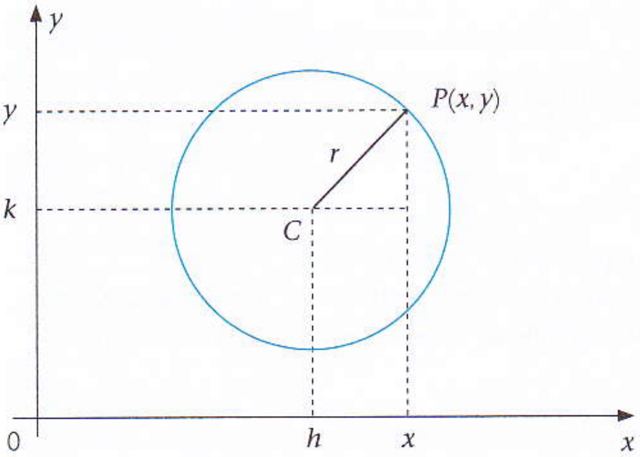


Figura 17: Circunferência de centro (h, k) e raio r.

Se (h, k) é o centro e r é o raio, então

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

é a equação da circunferência.

Quando o centro da circunferência coincide com a origem do sistema de coordenadas, a equação transforma-se em:

$$x^2 - y^2 = r^2$$

Toda equação da circunferência pode ser transformada em:

(1) $x^2 + y^2 + xA + yB + C = 0$

Pelo método de completamento do quadrado, em relação a x e y, a equação (1) fica:

(2) $x + \frac{A^2}{2} + y + \frac{B^2}{2} = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C)$

Nesta equação (2), temos os seguintes casos:

- Para $A^2 + B^2 - 4C > 0$ a circunferência é real; podemos traçar o seu gráfico.
- No caso $A^2 + B^2 - 4C < 0$, temos uma **circunferência** imaginária.
- Para $A^2 + B^2 - 4C = 0$, o raio é nulo e a equação (2) representa o ponto $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$.

Exemplo 1

Vamos encontrar uma equação para a circunferência de raio 5 e centro (–3, 4).

Aqui temos $r = 5$, $h = -3$, e $k = 4$.

Assim, a equação da circunferência é:

$(x - (-3))^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25.$

Reduzindo os termos, obtemos a equação desejada:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0.$

Exemplo 2

Vamos descrever o gráfico da equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

Uma vez que a equação é quadrática e os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, isto sugere que o gráfico é uma circunferência. Rearranjando os termos e completando os quadrados, obtemos:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -9 + 4 + 9$

$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$

Deste modo, o gráfico da equação dada é uma circunferência de centro (2, –3) e raio 2.

ACTIVIDADES 17 A 20

5.9 Equações da elipse

A **elipse** é a curva plana descrita por um ponto P que se desloca de modo que a soma de suas distâncias $|PF_1| + |PF_2|$ a dois pontos fixos F_1 e F_2 do seu plano permanece constante (figura 18). Os pontos fixos chamam-se **focos** da elipse.

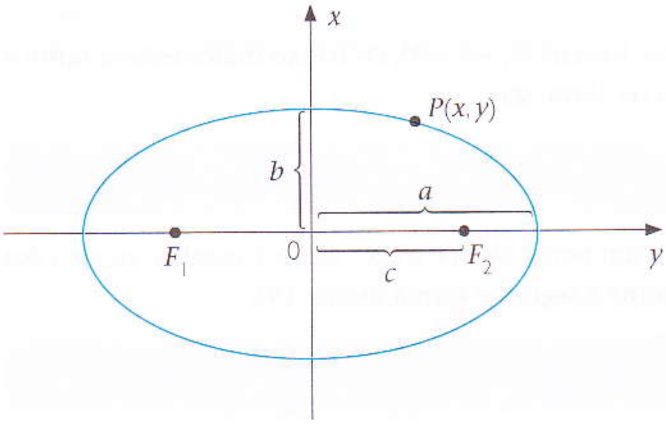


Figura 18: Elipse.

Sejam dados os focos pelas suas coordenadas, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, e $2a$ a soma constante, com $a > c$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse. De acordo com a definição da elipse, temos:

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$

ou, pelas coordenadas:

$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$

Elevando ao quadrado e agrupando os termos, obtemos:

$cx - a^2 = -a\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}.$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos:

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Dividindo ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$, a equação transforma-se em:

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{a^2 - c^2} = 1.$

Sendo $a > c$, temos $a^2 - c^2$ positivo. Tomando $a^2 - c^2 = b^2$, temos então a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou também assim:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Uma vez que esta equação só contém potências pares de x e y, a curva é simétrica em relação aos eixos coordenados e à origem. O ponto C é o **centro** da elipse; a corda maior que passa por C chama-se **eixo maior**, e a corda mais curta, **eixo menor**.

Repara que se $a = b$ os dois eixos serão iguais, e estaremos perante uma circunferência.

Se as coordenadas dos focos fossem $(0, -c)$ e $(0, c)$, o eixo maior estaria sobre o eixo dos y, e assim a equação da elipse seria:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Quando o centro da elipse é um ponto (h, k) e o eixo maior é paralelo ao eixo dos x, verifica-se que a equação toma a seguinte forma (figura 19).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

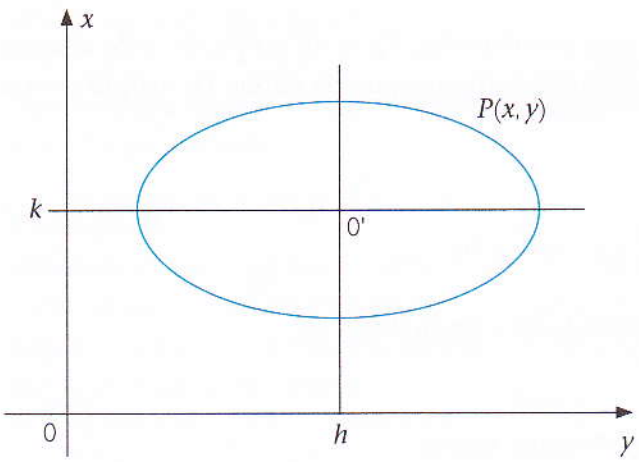


Figura 19.

ou se o eixo maior é paralelo ao eixo dos y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para qualquer dos dois casos, a **forma geral da equação da elipse** é:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

desde que A e B concordem em sinal.

ACTIVIDADES 21 A 25

5.10 Equação da hipérbole

A **hipérbole** é a curva plana descrita por um ponto P que se desloca de modo que a diferença das suas distâncias $|PF_1| - |PF_2|$ a dois pontos fixos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ do seu plano permanece constante, igual a $2a$, sendo a a constante que satisfaz a condição $a < c$.

Observa a hipérbole representada na figura 20.

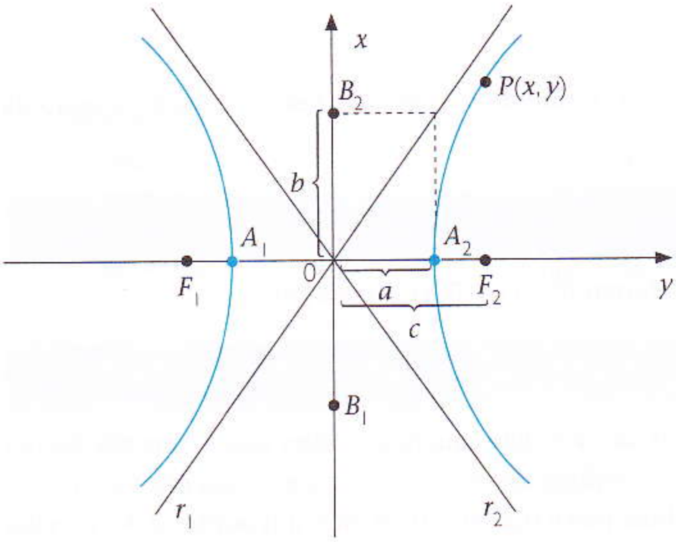


Figura 20: Hipérbole.

Nela, temos os seguintes elementos:

- **focos**: os pontos F_1 e F_2
- **vértices**: os pontos A_1 e A_2
- **centro**: o ponto O, que é o ponto médio de $|A_1A_2|$
- **semieixo real**: a
- **semieixo imaginário**: b
- **semidistância focal**: c, metade da distância $|F_1F_2|$
- **distância focal**: $|F_1F_2| = 2c$
- **eixo real**: $|A_1A_2| = 2a$ (contém os focos, denominando-se também **eixo transverso**)
- **eixo imaginário ou eixo conjugado**: $B_1B_2 = 2b$ ($b > 0$ e tal que $a^2 + b^2 = c^2$)
- **assíntotas**: as rectas r_1 e r_2

Vamos agora deduzir a equação da hipérbole. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole. De acordo com a definição da hipérbole, temos:

$|PF_1| - |PF_2| = 2a$

ou, usando as coordenadas:

$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$

Transpondo um dos radicais e elevando ao quadrado, obtemos:
$cx - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$.

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos:
$(a^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Dividindo ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$, a equação transforma-se em:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

Sendo $c > a$, temos $c^2 - a^2 > 0$. Tomando $c^2 - a^2 = b^2$, temos então a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se as coordenadas do foco forem $(0, -c)$ e $(0, c)$, a equação é:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As equações das assíntotas são $y = \pm\frac{b}{a}x$, quando o eixo dos x suporta o eixo transverso, e $y = \pm\frac{a}{b}x$ quando o suporte do eixo transverso é o eixo dos y.

Quando o centro da hipérbole não é o ponto $(0, 0)$, mas um ponto (h, k), e o eixo transverso for paralelo ao eixo dos x, verifica-se que a equação toma a seguinte forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} - \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

se os focos forem $(0, -c)$ e $(0, c)$.

A forma geral da equação da hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados é:

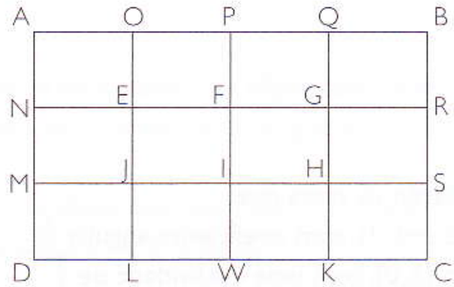
$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

desde que A e B tenham sinais contrários.

ACTIVIDADES 26 A 28

Actividades

1. Considera o rectângulo [ABCD] dividido em 12 rectângulos iguais.



Determina:

a) $2\overrightarrow{AO}$

b) $-2\overrightarrow{HS}$

c) $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK}$

d) $\overrightarrow{NE} + 2\overrightarrow{JI}$

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$

f) $\overrightarrow{NR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MN}$

2. Dados os pontos $A(2, 3)$, $B(4, -2)$, $C(3, 7)$, $D(5, -4)$, representa no sistema de coordenadas os vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{DC}$

c) $-\overrightarrow{BC}$

d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3. Determina a extremidade do vector $\overrightarrow{MN} = (3, 4)$, se $M(5, 2)$. Representa o vector $\overrightarrow{MN}$ no sistema de coordenadas.

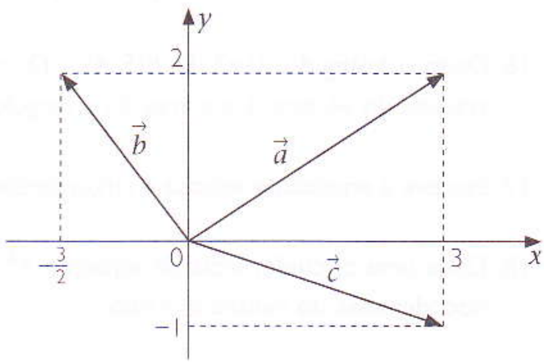
4. Determina o ponto inicial do vector $\overrightarrow{AB} = (2, -3)$, se a sua extremidade coincide com o ponto $(-1, 2)$. Representa o vector $\overrightarrow{AB}$ no sistema de coordenadas.

5. Considerando a figura ao lado, determina:

a) $\vec{a} - 2\vec{b}$

b) $3\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$

c) $-2\vec{a} + \vec{c}$



6. Considerando ainda a figura do exercício anterior, determina:

a) o comprimento do vector a;

b) o vector unitário na direcção do vector c.

Actividades

7. Sabendo que $\vec{u} = (\frac{1}{2}, 0)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (2, 5)$, efectua:
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$
   c) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{v})$

8. Determina uma equação da recta que:
   a) passa pelo ponto $(-4, 3)$, com coeficiente angular $\frac{1}{2}$;
   b) passa pelo ponto $(2, 0)$, com uma declividade de $\frac{3}{4}$.

9. Determina uma equação da recta que passa pelos pontos $(-2, -3)$ e $(4, 2)$.

10. Determina a equação da recta que passa pelo ponto $(-2, 3)$ e é perpendicular à recta $2x + 3y + 6 = 0$.

11. Determina a equação da recta que passa pelo ponto $A(2, -3)$ e é paralela à recta que passa pelos pontos $P(4, 1)$ e $B(-2, 2)$.

12. Determina a distância:
    a) entre os pontos $A(-3, 1)$ e $B(2, 0)$;
    b) da origem do sistema ao ponto $P(3, -4)$.

13. Dados os pontos $P_1(2, -5)$ e $P_2(-1, 1)$, determina o ponto $P(x, y)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = \frac{2}{3}$.

14. Determina o ponto médio M do segmento AB, com $A(8, -3)$ e $B(-11, 5)$.

15. Determina a distância d do ponto $P(1, -2)$ à recta r dada por $3x + 4y - 6 = 0$.

16. Dado o triângulo $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(2, -1)$, determina o comprimento da altura traçada do vértice A e a área do triângulo.

17. Escreve a equação e esboça a circunferência de centro no ponto $(-2, 3)$ e raio 4.

18. Dada uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$, determina as coordenadas do centro e o raio.

19. Determina uma equação da circunferência cujo centro é $(-4, 2)$ e o diâmetro é 8.

Actividades

20. Determina uma equação da circunferência cujo centro é a origem e corta o eixo dos x em 6.

21. Determina a equação e faz o esboço da elipse com centro na origem e eixo maior igual a 6 sobre o eixo dos x e eixo menor igual a 4.

22. Encontra a equação da elipse que tem centro na origem, eixo maior sobre o eixo dos x e passa pelos pontos $(4, 3)$ e $(6, 2)$.

23. Determina as coordenadas dos focos da elipse $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$.

24. Determina uma equação da elipse cujo eixo maior mede 10 e cujas coordenadas dos focos são $F_1(2, -1)$ e $F_2(2, 5)$.

25. Determina o centro e os focos da seguinte elipse: $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$.

26. Dada a equação da hipérbole $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$, faz o esboço e determina as coordenadas dos:

    a) vértices;
    b) focos.

27. Encontra a equação da hipérbole de centro em $(-4, 1)$, um vértice em $(2, 1)$ e semieixo conjugado igual a 4.

28. Determina, para uma hipérbole cuja equação é $9x^2 - 16,-y^2 - 18,x - 64\,y - 199 = 0$:

    a) o centro;
    b) os vértices;
    c) os focos;
    d) as equações das assíntotas;
    e) o esboço da hipérbole.

Unidade 6

Funções, inequações e equações trigonométricas

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

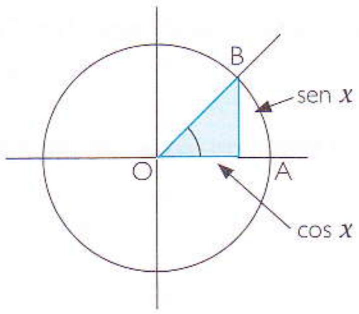
- identificar a função, a equação e a inequação trigonométricas;
- representar graficamente as funções sen$x$, cos$x$, tg$x$, cotg$x$, $y = \text{A sen } (ax + b) + \text{B}$ e $y = \text{A cos } (ax + b) + \text{B}$, como funções reais de variável real;
- identificar a periodicidade das funções trigonométricas;
- interpretar a periodicidade das funções trigonométricas;
- fazer o estudo completo das funções sen$x$, cos$x$, tg$x$, cotg$x$, $y = \text{A sen } (ax + b) + \text{B}$ e $y = \text{A cos } (ax + b) + \text{B}$;
- aplicar a fórmula de seno e co-seno na resolução de problemas reais aplicando triângulos;
- aplicar as fórmulas da soma e diferença, ângulos duplos, bissecção de ângulos e do produto e da soma na resolução de problemas práticos da vida;
- identificar as equações e inequações trigonométricas;
- resolver as equações e inequações trigonométricas;
- transformar a fórmula da soma em produto.

6.1 Funções trigonométricas – seno, co-seno e tangente

Num círculo trigonométrico, há uma correspondência entre as amplitudes dos ângulos e os números reais. Cada amplitude de um ângulo corresponde a um e um só número real, que é o seu seno ou o seu co-seno. Em notação matemática, o seno e co-seno são representados por sen e cos.

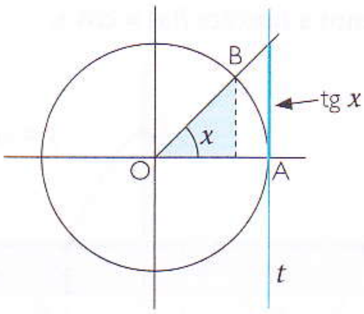
$x \to \text{sen } x;\ x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \text{sen } x$

$x \to \cos x;\ x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$



A cada ângulo de amplitude $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, corresponde um e um só número real que é a sua tangente. Em notação matemática, a tangente representa-se por tan ou tg.

$x \to \text{tg } x;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \text{tg } x$
$k \in \mathbb{Z}$

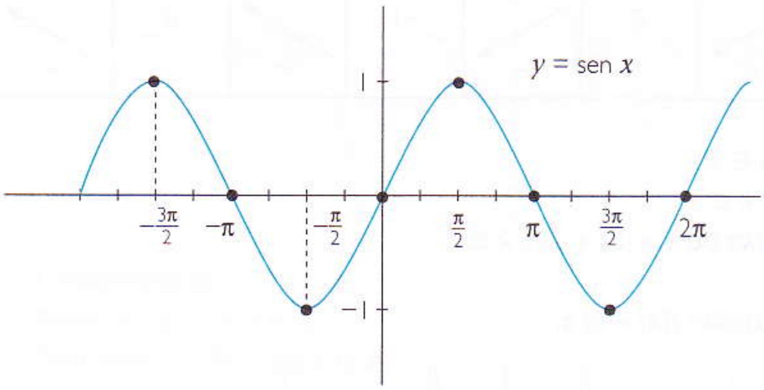


A tangente de um ângulo do 1.° ou 3.° quadrante é dada pela ordenada do ponto de intersecção do eixo t com o lado extremidade do ângulo (num círculo trigonométrico).

6.1.1 Representação gráfica de funções trigonométricas

Consideremos a função: $f(x) = \text{sen } x$.

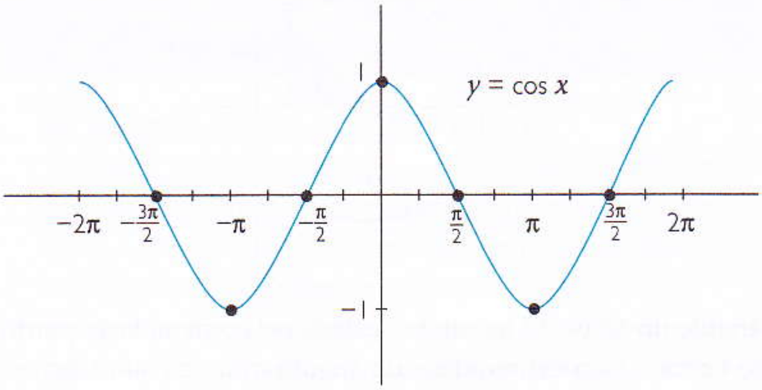
A representação gráfica da função $y = \text{sen } x$ vem a seguir. A linha traçada chama-se sinusóide.



Características:
Zeros: $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
Máximos: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
Mínimos: $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
Domínio: $x \in \mathbb{R}$
Contradomínio: $y \in [-1;1]$
Monotonia e sinal:

x	$0 + k2\pi$	1.° quad	$\frac{\pi}{2} + k2\pi$	2.° quad	$\pi + k2\pi$	3.° quad	$\frac{3\pi}{2} + k2\pi$	4.° quad	$k2\pi$
sen x	0	↗ +	1	↘ +	0	↘ −	−1	↗ −	0

Consideremos a função: $f(x) = \cos x$.



Características:

Domínio: $x \in \mathbb{R}$

Contradomínio: $y \in [-1; 1]$

Monotonia e sinal:

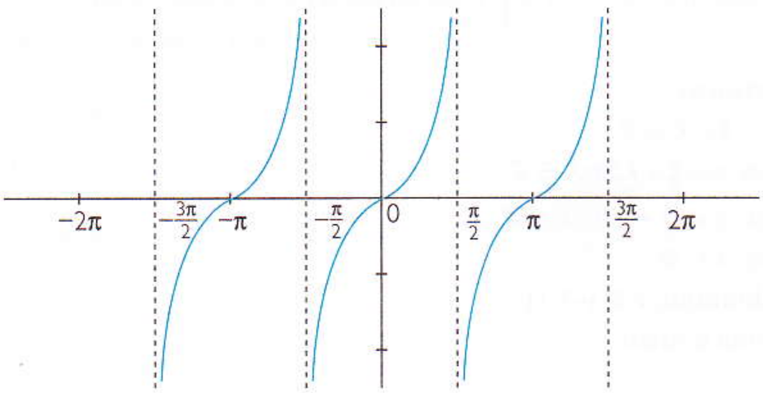
x	$0 + k2\pi$	1.° quad	$\frac{\pi}{2} + k2\pi$	2.° quad	$\pi + k2\pi$	3.° quad	$\frac{3\pi}{2} + k2\pi$	4.° quad	$k2\pi$
$\cos x$	1	↘ +	0	↘ −	−1	↗ −	0	↗ +	1

Zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Máximos: $x = k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = (2k + 1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Consideremos a função: $f(x) = \text{tg}\ x$.



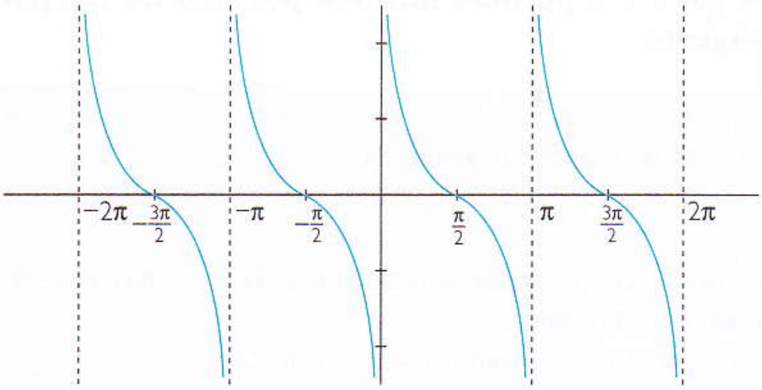
Características:
Domínio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
Contradomínio: $f(x) \in \mathbb{R}$

Monotonia e sinal:

x	$0 + k\pi$	1.° quad	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	2.° quad	$\pi + k\pi$	3.° quad	$\frac{3\pi}{2} + k\pi$	4.° quad	$k\pi$
tg x	0	↗ +	Não existe	↗ −	0	↗ +	Não existe	↗ −	0

Zeros: $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Consideremos a função: $f(x) = \text{cotg } x$.



Características:
Zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
Domínio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
Contradomínio: $f(x) \in \mathbb{R}$
Monotonia e sinal:

x	$0 + k\pi$	1.° quad	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	2.° quad	$\pi + k\pi$	3.° quad	$\frac{3\pi}{2} + k\pi$	4.° quad	$k\pi$
cotg x	Não existe	↘ +	0	↘ −	Não existe	↘ +	0	↘ −	Não existe

6.1.2 Noção de período

Dos estudos feitos, sabe-se que:

a) os valores do seno e do co-seno de um ângulo repetem-se ao adicionar à amplitude do ângulo 2π ou um outro múltiplo de 2π ($k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$).
   Por isso:
   $\text{sen}\,(x + k2\pi) = \text{sen}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R};\ k \in \mathbb{Z}$
   $\cos\,(x + k2\pi) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R};\ k \in \mathbb{Z}$
   Diz-se que **2π é o período mínimo positivo do seno e do co-seno**;

b) os valores da tangente e da co-tangente repetem-se ao adicionar à amplitude do ângulo π ou um outro múltiplo de π ($k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$).
   Por isso:
   $\text{tg}\,(x + k\pi) = \text{tg}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$
   $\text{cotg}\,(x + k\pi) = \text{cotg}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R} / \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$
   Diz-se que **π é o período mínimo positivo da tangente e da co-tangente**.

Exemplos

Verificar que são periódicas, de período p, as funções:

a) $f(x) = \text{sen}\,(2x);\ p = \pi$

   Uma função $f(x)$ é periódica de período p se $f(x + p) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   Deste modo, temos que:
   $f(x + \pi) = \text{sen}\,[2(x + \pi)] = \text{sen}\,(2x + 2\pi) = \text{sen}\,(2x)$.
   Conclui-se que:
   $f(x + \pi) = f(x)$, logo a função $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ é periódica de período π.

b) $g(x) = \cos\,(3x - \frac{\pi}{6}),\ p = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} g(x + \tfrac{2\pi}{3}) &= \cos\,[3(x + \tfrac{2\pi}{3}) - \tfrac{\pi}{6}] \\ &= \cos\,(3x + 2\pi - \tfrac{\pi}{6}) \\ &= \cos\,[(3x - \tfrac{\pi}{6}) + 2\pi] \\ &= \cos\,(3x - \tfrac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

   Conclui-se que:
   $g(x + \frac{2\pi}{3}) = g(x)$, logo a função $g(x) = \cos\,(3x - \frac{\pi}{6})$ é periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

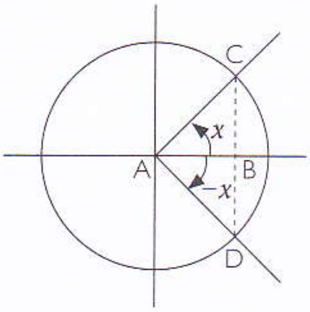
6.1.3 Noção de paridade

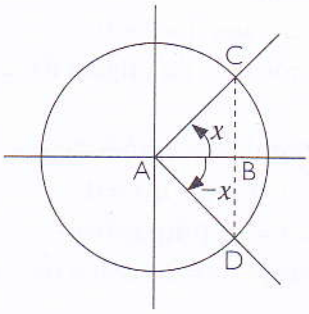
Uma função $f(x)$ diz-se que é par se $f(-x) = f(x)$. Uma função $f(x)$ diz-se que é ímpar se $f(-x) = -f(x)$.

Exemplos

$\cos(-30°) = \cos 30°$
Logo, $y = \cos x$ é uma função par.

$\text{sen}(-30°) = -\text{sen } 30°$
Logo, $y =$ sem x é uma função ímpar.





$\text{sen } x = BC$ e $\text{sen}(-x) = BD = -BC$
isto é:
$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$

Conclusão:
$y = \text{sen } x$ é uma função ímpar

$\cos x = AB$; $\cos(-x) = AB$
isto é:
$\cos(-x) = \cos x$

Conclusão:
$y = \cos x$ é uma função par

Já sabes que $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$. Então:
$\text{tg}(-30°) = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \frac{-\text{sen } 30°}{\cos 30°} = -\text{tg } 30°$
$\text{tg}(-30°) = -\text{tg } 30°$, daqui pode concluir-se que $y = \text{tg } x$ é uma função ímpar.
$\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$.

Analogamente: $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg } x$, sendo cotg uma função ímpar.

6.2 Estudo de uma função

Para se fazer o estudo completo de uma função deve determinar-se o seu domínio, contradomínio, ordenada na origem, os zeros, o máximo e mínimo, assim como fazer o seu esboço gráfico.

Exemplo:
Dada a função trigonométrica $f(x) = 2 + \text{sen } x$, vamos:

a) indicar o domínio de $f(x)$:
O domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R}\}$.

b) determinar o contradomínio de $f(x)$:
A função sen x tem contradomínio $[-1; 1]$.
O contradomínio de $f(x)$ é então:
$y = 2 \pm 1 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$ e $y = 2 - 1 = 1$.
Logo, o contradomínio de $f(x)$ e $y \in [1; 3]$.

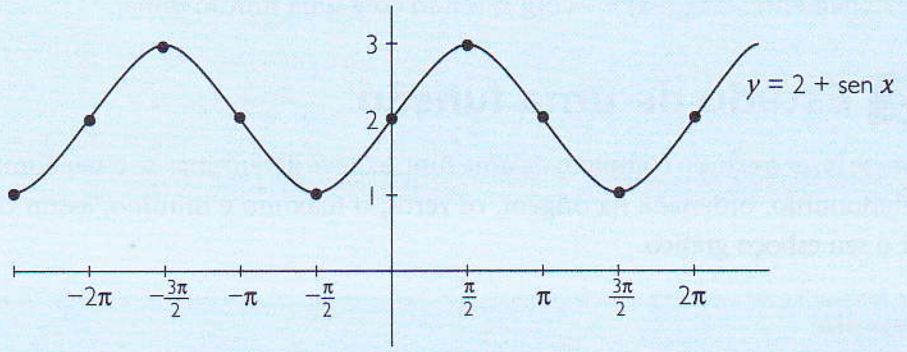
c) calcular a ordenada na origem:
$y = f(0)$
$y = 2 + \text{sen } 0 = 2 + 0$
A ordenada na origem é $y = 2$.

d) determinar a expressão dos zeros de $f(x)$:
$y = 0 \Rightarrow 2 + \text{sen } x = 0$
sen $x = -2$ (impossível)
A função $y = 2 + \text{sen } x$ não tem zeros.

e) escrever a expressão geral dos máximos de $f(x)$:
O contradomínio de $f(x)$ é $y \in [1; 3]$.
$y_{máx} = 3$ e logo,
$2 + \text{sen } x = 3$
sen $x = 1$
Os máximos de $f(x)$ são $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

f) escrever a expressão geral dos mínimos de $f(x)$:
$y_{mín} = 1$ e logo,
$2 + \text{sen } x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = -1$
Os mínimos de $f(x)$ são $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

g) esboçar o gráfico de f:



6.2.1 Funções do tipo $f(x) = \text{A sen }(ax + b) + \text{B}$ e $f(x) = \text{A cos }(ax + b) + \text{B}$

No estudo do movimento harmónico simples, aparecem funções do tipo:
$y = \text{A sen }(ax + b)$ ou $y = \text{A cos }(ax + b)$.

Funções do tipo $y = \text{sen } x + d$

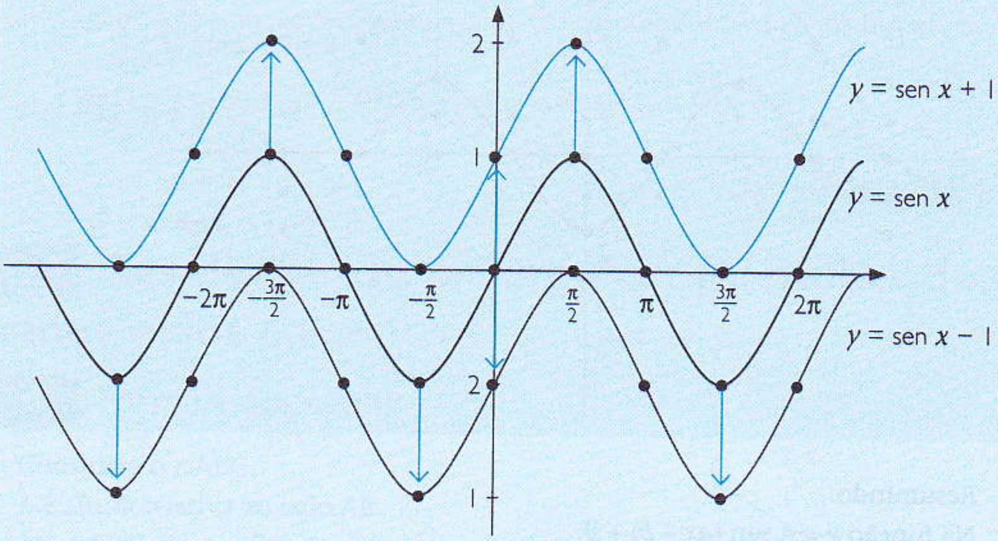
Obtém-se o gráfico da função $y = \text{sen } x + d$ a partir do gráfico de $y = \text{sen } x$ pela translação ao longo do eixo dos y (eixo das ordenadas):

- no valor de $|d|$ unidades para cima se $d > 0$;
- no valor de $|d|$ unidades para baixo se $d < 0$.

Exemplo 1

$y_1 = \text{sen } x + 1$

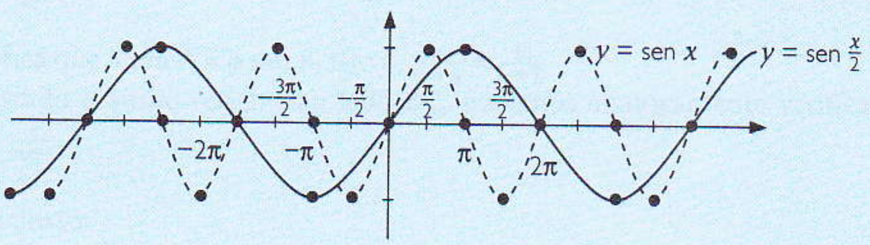
$y_2 = \text{sen } x - 1$



Exemplo 2

$y = \text{sen } \frac{x}{2}$

O gráfico da função $y = \text{sen } \frac{x}{2}$ obtém-se do gráfico da função $y = \text{sen } x$ por um alargamento horizontal de factor 2.

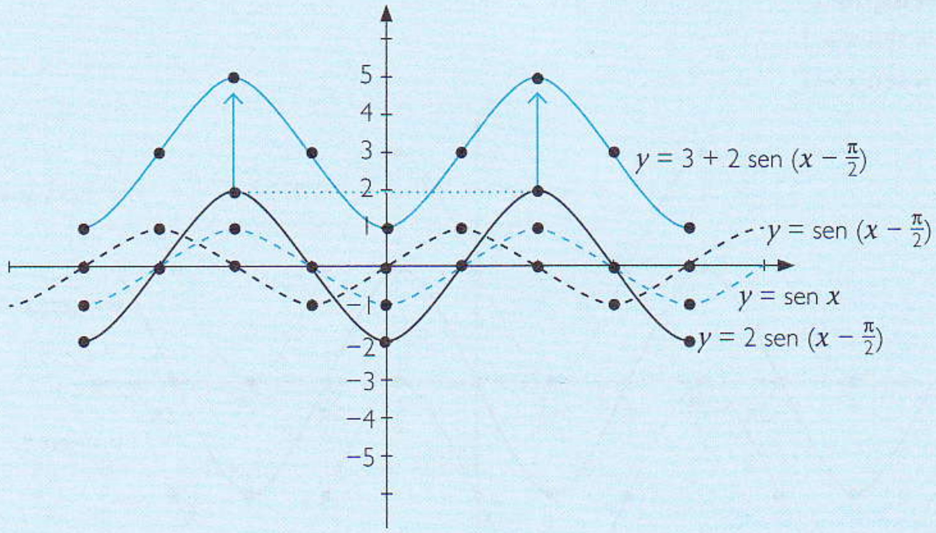


Exemplo 3

$y = 3 + 2 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{2})$

O gráfico da função $y = 3 + 2 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{2})$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = \text{sen } x$ seguindo os passos:

1. Translada o gráfico de $y = \text{sen } x$ para a direita $\frac{\pi}{2}$ unidades para obter o gráfico de $y = \text{sen } (x - \frac{\pi}{2})$.
2. Faz uma extensão do gráfico $y = \text{sen } (x - \frac{\pi}{2})$ ao longo do eixo dos y em 2 unidades para obter $y = 2 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{2})$.
3. Faz a translação de $y = 2 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{2})$ ao longo do eixo dos y em 3 unidades para cima para obter o gráfico de $y = 3 + 2 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{2})$.



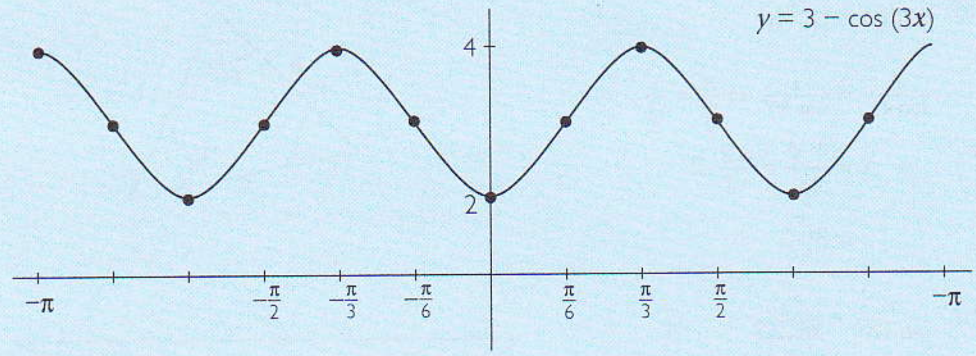
Resumindo:

Na função $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$:

- A está relacionado com a amplitude (amplitude = A);
- B está relacionado com uma translação vertical de B unidades;
- a está relacionado com o período (período = $\frac{2\pi}{a}$);
- b está relacionado com uma translação horizontal de b unidades.

Exemplo 4

$y = 3 - \cos(3x);\ x \in [-\pi; \pi]$



Esta função tem período $\frac{2\pi}{3}$ e contradomínio $y \in [2; 4]$.

Observação:

a) O período da função f só se altera quando se multiplica ou divide o argumento x por $|a| \neq 1$.

b) Sendo p o período de f, então o período da função $f(ax)$ é $\frac{p}{|a|}$.

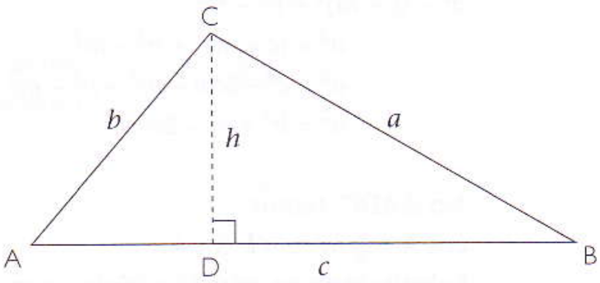
ACTIVIDADES 1 A 6

6.3 Resolução de triângulos: fórmulas dos senos e dos co-senos

6.3.1 Fórmula dos senos

Considera o $\triangle ABC$.

- h é altura relativa ao lado AB.
- No $\triangle ADC$ sen A $= \frac{h}{b} \Rightarrow h = b$ sen A
- No $\triangle BDC$ sen B $= \frac{h}{a} \Rightarrow h = a$ sen B



Verifica que b sen A $= a$ sen B, isto é, $\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$.

Traçando a altura relativa ao lado BC, podemos analogamente verificar que $\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$.

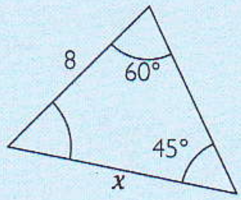
Conclusão:

$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$ é a fórmula dos senos

Exemplos

Vamos calcular x e y nos seguintes casos:

a) $\frac{8}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°}$

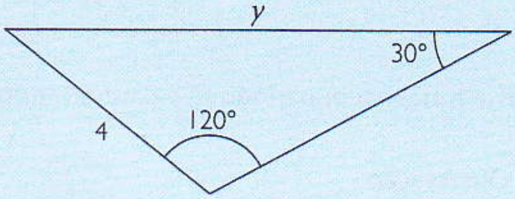


$\frac{8}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$x = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 2$

$x = 8\sqrt{\frac{3}{2}}.$

b) $\frac{y}{\text{sen } 120°} = \frac{4}{\text{sen } 30°}$



$\frac{y}{\text{sen } 120°} = \frac{4}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$

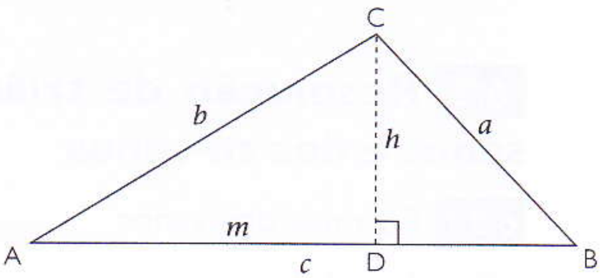
$y = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$y = 4\sqrt{3}.$

6.3.2 Fórmula dos co-senos

Considera o $\triangle ABC$.

m é a projecção de AC sobre AB.



Usando o teorema de Pitágoras:

$h^2 = a^2 - (c - m)^2$ e $h^2 = b^2 - m^2$

O que significa que:

$a^2 - (c - m)^2 = b^2 - m^2$

$a^2 = (c - m)^2 + b^2 - m^2$

$a^2 = c^2 - 2cm + m^2 + b^2 - m^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$

No $\triangle ADC$, temos:

$\cos A = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cos A$

Substituindo na relação anterior, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(b \cos A)$, isto é:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

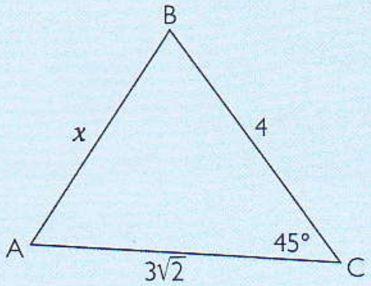
Demonstrações análogas permitem concluir que:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Exemplos

Vamos calcular x e y nos seguintes casos:

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 45°$



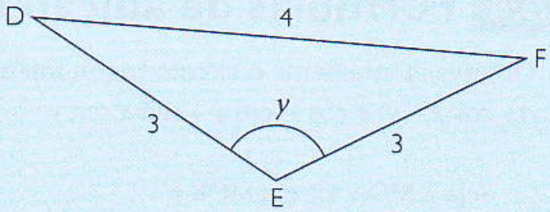
$x^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 16 + 18 - 24$

$x^2 = 34 - 24 = 10$

$x = \sqrt{10}$.

b) $4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos y$



$16 = 18 - 18 \cos y$

$-2 = -18 \cos y$

$\cos y = \frac{1}{9}$

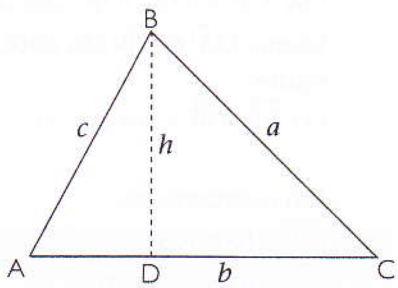
$\cos y \approx 0{,}111$

$y = 83{,}63°$.

ACTIVIDADES 7 A 9

6.3.3 Área de um triângulo

Já sabes, das classes anteriores, que a área de um triângulo é igual ao semi-produto do comprimento de um lado pela altura respectiva: $A = \frac{b \cdot h}{2}$.



Repara que $h = c \cdot \text{sen } A$; $h = a \text{ sen } c$. Por isso, podemos escrever:

Área $= \frac{bc \text{ sen A}}{2}$

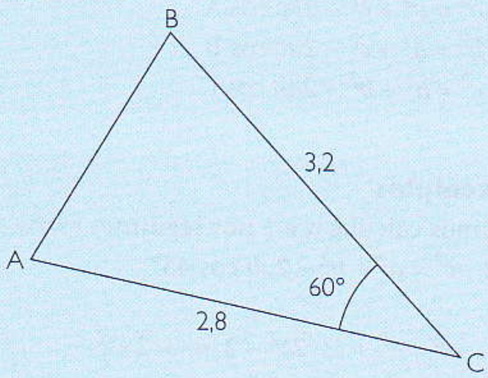
Área $= \frac{ab \text{ sen C}}{2}$

Área $= \frac{ac \text{ sen B}}{2}$

Exemplo

Num triângulo ABC, $a = 3{,}2$; $b = 2{,}8$ e $\measuredangle C = 60°$.

Vamos calcular a área do triângulo.



$$\text{Área} = \frac{ab}{2} \cos C$$

$$\text{Área} = \frac{3{,}2 \times 2{,}8 \times \cos 60°}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{3{,}2 \times 2{,}8 \times \frac{1}{2}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{8{,}96}{4}$$

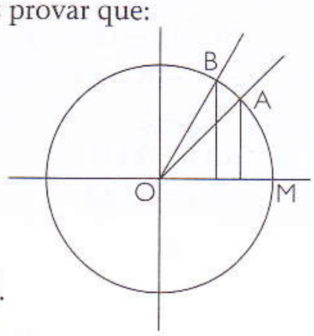
$$\text{Área} = 2{,}24.$$

ACTIVIDADES 10 A 12

6.4 Fórmulas de adição de ângulos

Observa atentamente o círculo trigonométrico. Vamos provar que:

1. $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$



Seja $\measuredangle MOA = y$ e $\measuredangle MOB = x$

logo, $\measuredangle AOB = \measuredangle MOB - \measuredangle MOA$,

isto é, $\measuredangle AOB = x - y$

O ângulo $(x - y)$ é formado pelos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

O produto entre dois vectores chama-se o produto interno e é dado por:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(x - y)$

Como $|\overrightarrow{OA}|$ e $|\overrightarrow{OB}|$ são raios do mesmo círculo trigonométrico $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, temos:

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(x - y)$

Em coordenadas:

$\overrightarrow{OA} = (\cos y, \operatorname{sen} y)$

$\overrightarrow{OB} = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

Logo:

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

De (1) e (2) conclui-se que: $\mathbf{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$.

2. $\cos(x+y) = \cos[x-(-y)] = \cos x \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y)$
   Recorda que:
   $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
   $\cos(-y) = \cos y$
   Logo:
   $\mathbf{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

Exemplo 1

$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{6} = 0\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Recorda que:

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemplo 2

$\cos\frac{\pi}{2} = ?$

$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$

3. $\operatorname{sen}(x+y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right]$
   $\operatorname{sen}(x+y) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right]$
   $\operatorname{sen}(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\cos y + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\operatorname{sen} y$
   Recorda que:
   $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$
   $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
   Logo:
   $\mathbf{\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}$

Exemplo 3

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.$

4. $\text{sen } (x - y) = \text{sen } [x + (-y)]$
$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos (-y) + \cos x \cdot \text{sen } (-y)$
Recorda que:
$\text{sen } (-y) = -\text{sen } y$
$\cos (-y) = \cos y$
Logo:
$\mathbf{sen\ (x - y) = sen\ x \cos y - \cos x\ sen\ y}$

Exemplo 4
$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$
$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}$
$\text{sen } \frac{\pi}{6} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$

6.5 Fórmulas do ângulo duplo

Já se sabe que $\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y$.
Então:
$\text{sen } (2x) = \text{sen } (x + x)$.
Por isso, $\text{sen } (2x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cos x$

$\text{sen } (2x) = 2 \text{ sen } x \cos x$

Analogamente:
$\cos 2x = \cos (x + x)$
$\cos (2x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \text{ sen } x$

$\cos (2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Exemplos

a) $\text{sen } 60° = \text{sen } (2 \cdot 30°)$
$= 2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 30°$
$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $\cos 60° = \cos (2 \cdot 30°)$
$= \cos^2 30° - \text{sen}^2 30°$
$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$
$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
$= \frac{2}{4}$
$= \frac{1}{2}.$

6.6 Bissecção de ângulos

Presta atenção:

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$$
$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$$
$$\cos x = 1 - \text{sen}^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$$
$$\cos x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{x}{2}$$
$$2\text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$
$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

Recorda que:

$\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

Logo:

- $\text{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

E também:

- $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$
- $\text{tg}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\text{cotg}\, x = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

Exemplo 1

$\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \pi}{2}}$

$\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - (-1)}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1.$

Exemplo 2

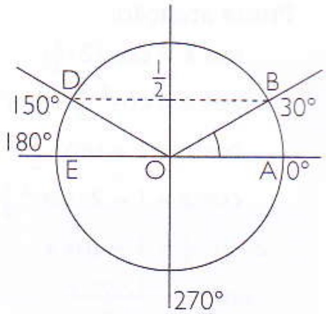
$\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Outras fórmulas:

- $\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2\, \text{sen}\, \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
- $\text{sen}\, x - \text{sen}\, y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\, \text{sen}\, \frac{x + y}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{x - y}{2}$

6.7 Equações trigonométricas

Vamos resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$.



Observa que sen $30° = \frac{1}{2}$ e sen $150° = \frac{1}{2}$.
Nota: $150° = 180° - 30°$, logo:
sen $30°$ = sen $150°$ = sen $(180° - 30°)$
Em geral, se sen x = sen α, então:
$x = \alpha + k2\pi \vee x = (\pi - \alpha) + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
$x = \alpha + k \cdot 360° \vee x = (180° - \alpha) + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}$.

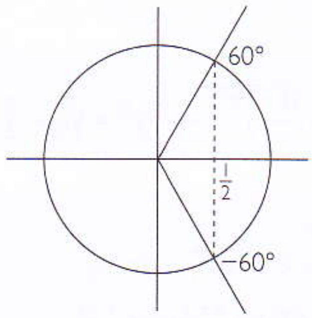
Exemplo
Vamos resolver a equação sen $(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.
Como $\frac{1}{2}$ = sen $\frac{\pi}{6}$, então sen $(2x - \frac{\pi}{2})$ = sen $\frac{\pi}{6}$.

$$
\begin{aligned}
2x - \tfrac{\pi}{2} &= \tfrac{\pi}{6} + k2\pi & &\vee\ 2x - \tfrac{\pi}{2} = \pi - \tfrac{\pi}{6} + k2\pi \\
2x &= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{6} + k2\pi & &\vee\ 2x - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\
2x &= \tfrac{4\pi}{6} + k2\pi & &\vee\ 2x = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\
x &= \tfrac{\pi}{3} + k\pi & &\vee\ 2x = \tfrac{8\pi}{6} + k2\pi \\
x &= \tfrac{\pi}{3} + k\pi & &\vee\ x = \tfrac{2}{3}\pi + k\pi
\end{aligned}
$$

$S = \{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Como resolver a equação cos $x = \frac{1}{2}$?

Observa que cos $60° = \frac{1}{2}$.
cos $(-60°) = \frac{1}{2}$, isto é:
cos $60°$ = cos $(-60°)$.



Conclui-se que:
se cos x = cos α, então $x = \alpha + k2\pi \vee x = -\alpha + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1
Vamos resolver a equação cos $x = \frac{1}{2}$.

Como $\frac{1}{2}$ = cos $60°$, então cos x = cos $60°$.
$x = 60° + k \cdot 360° \vee x = -60° + k \cdot 360°$;
$S = \{x \in \mathbb{R}: x = -60° + k \cdot 360° \vee x = 60° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 2

Vamos resolver a equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Como $-1 = \cos\pi$, então $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi$.

$3x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \quad \vee \quad 3x - \frac{\pi}{6} = -\pi + k2\pi$

$3x = \frac{\pi}{6} + \pi + k2\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{\pi}{6} - \pi + k2\pi$

$3x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{-5\pi}{6} + k2\pi$

$x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = \frac{-5\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi$

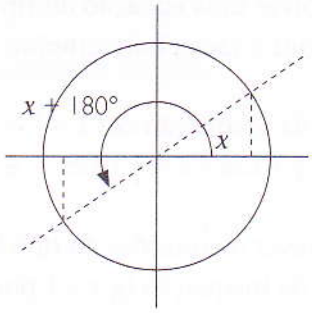
$S = \{x \in \mathbb{R}: x = -\frac{5\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Analogamente:

$\text{tg}\, x = \text{tg}\,(x + \pi)$

$\text{cotg}\, x = \text{cotg}\,(x + \pi)$

Se $\text{tg}\, x = \text{tg}(x + \pi)$ então $x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.



Exemplo 1

Vamos resolver a equação $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$.

Como $1 = \text{tg}\,\frac{\pi}{4}$, então $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4}$

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2

Vamos resolver a equação $\text{cotg}\,(2x - \pi) = \sqrt{3}$.

Como $\sqrt{3} = \text{cotg}\,\frac{\pi}{6}$, então $\text{cotg}\,(2x - \pi) = \text{cotg}\,\frac{\pi}{6}$

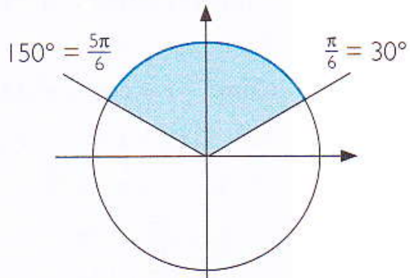
$2x - \pi = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

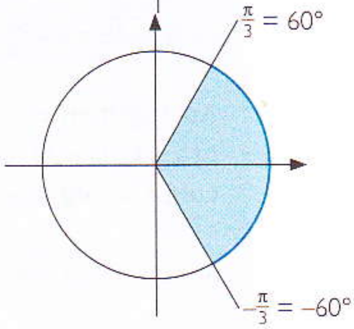
ACTIVIDADES 13 A 16

6.8 Inequações trigonométricas

Como resolver uma inequação do tipo sen $x > \frac{1}{2}$?
Procura no círculo trigonométrico todos os arcos x que verificam a condição sen $x > \frac{1}{2}$.



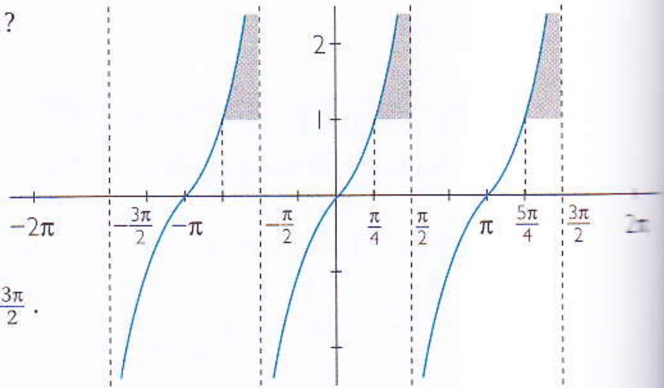
No intervalo $x \in [0, 360°]$, a solução é $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.
Em geral, a solução da inequação sen $x > \frac{1}{2}$ é:
$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.



Como resolver uma equação do tipo cos $x > \frac{1}{2}$?
Vamos seguir o raciocínio anterior.

A solução da inequação cos $x > \frac{1}{2}$ é:
$S = \{x \in \mathbb{R}: -\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

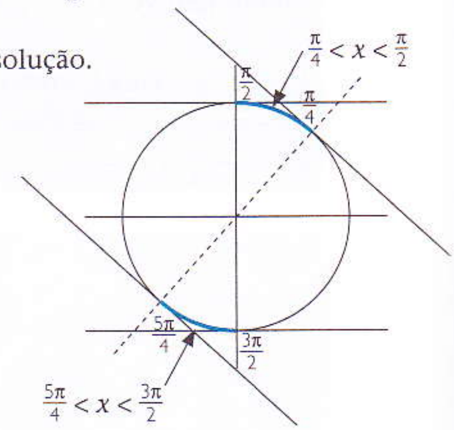
Como resolver inequações do tipo tg $x > 1$?
A solução da inequação tg $x > 1$ pode ser encontrada em vários troços, conforme ilustra o gráfico da função $y = $ tg x.



Para $x \in [0, 2\pi]$ temos $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Em geral, a solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Usando o círculo trigonométrico, chega-se à mesma solução.



ACTIVIDADES 17 A 20

Actividades

1. Dada a função $f(x) = 3 - 2 \text{ sen } x$:
   a) Determina o contradomínio da função.
   b) Escreve a expressão dos máximos de $f(x)$.
   c) Escreve a expressão dos mínimos.
   d) Calcula a ordenada na origem.
   e) Esboça o gráfico de f.

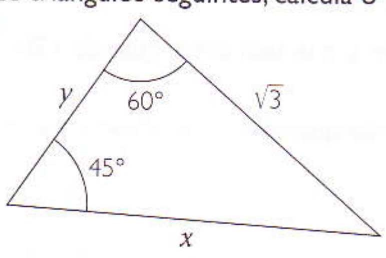
2. Encontra o contradomínio das funções:
   a) $f(x) = 1 - \cos 2x$
   b) $f(x) = 2 + \cos^2 x$

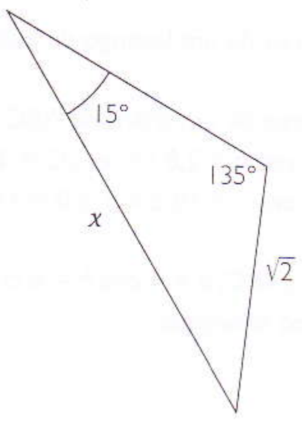
3. Dada a função $g(x) = 3 - \cos (3x)$:
   a) Determina o contradomínio de $g(x)$.
   b) Calcula a ordenada na origem.
   c) Escreve a equação dos máximos e dos mínimos de $g(x)$.
   d) Esboça o gráfico de $g(x)$.

4. Calcula o domínio das funções:
   a) $f(x) = \text{tg } (3x)$
   b) $g(x) = 1 - \text{tg}^2 (x + \frac{\pi}{3})$

5. Considera a função $m(x) = 3 + \cos 2x$.
   a) Calcula $m(\frac{\pi}{6}) + m(-\frac{5\pi}{3})$.
   b) Encontra o contradomínio de m.
   c) Simplifica $m(x + \frac{\pi}{4})$.

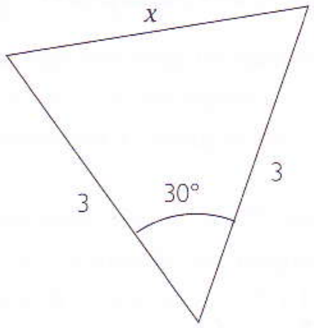
6. Esboça no intervalo $[-2\pi; 2\pi]$ os gráficos das seguintes funções:
   a) $y = 2 - \text{sen } (x + \frac{\pi}{3})$
   b) $y = 1 + \cos (2x - \pi)$
   c) $y = -3 + \cos x$
   d) $y = -2 + 3 \text{ sen } (x - \frac{\pi}{3})$

7. Nos triângulos seguintes, calcula o valor de x e y:
   a)


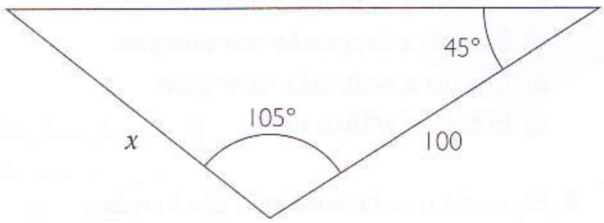
   b)


Actividades

c)



d)

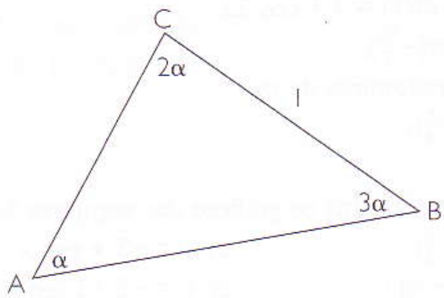


8. As diagonais de um rectângulo medem 20 cm cada uma e formam um ângulo de 60°.

   Selecciona a opção que representa a área deste rectângulo:

   a) 100 cm^2
   b) 200 cm^2
   c) $50\sqrt{3}$ cm^2
   d) $100\sqrt{3}$ cm^2
   e) $200\sqrt{3}$ cm^2

9. No triângulo abaixo, se $\overline{BC} = 1$, então $\overline{AB}$ é igual a:



   a) 2   b) 3   c) 4   d) 5

10. Calcula a área de um losango de lado 8 dm e que tem um ângulo de 130°.

11. Calcula a área de um triângulo ABC sabendo que:

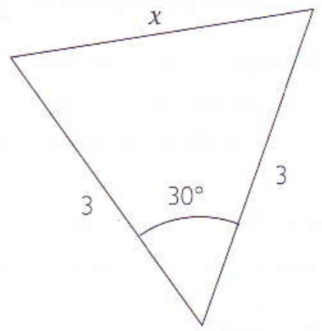
    a) $a = 3{,}2$ cm; $b = 2{,}8$ cm e $\measuredangle C = 32°$
    b) $a = 8{,}4$ dm; $c = 10$ dm e $\measuredangle B = 115°$

12. Dado um $\triangle ABC$, $a = 4$ cm; $b = 6$ cm e $\measuredangle C = 120°$, calcula:

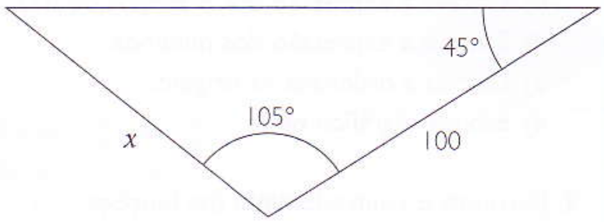
    a) a área do triângulo;
    b) o perímetro do $\triangle ABC$.

Actividades

c)



d)

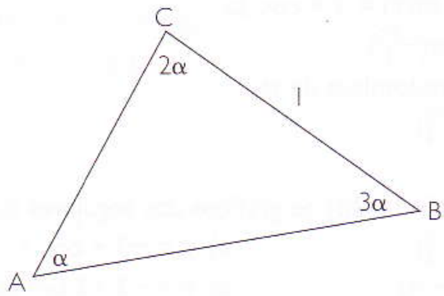


8. As diagonais de um rectângulo medem 20 cm cada uma e formam um ângulo de 60°.

   Selecciona a opção que representa a área deste rectângulo:

   a) $100\ cm^2$
   b) $200\ cm^2$
   c) $50\sqrt{3}\ cm^2$
   d) $100\sqrt{3}\ cm^2$
   e) $200\sqrt{3}\ cm^2$

9. No triângulo abaixo, se $\overline{BC} = 1$, então $\overline{AB}$ é igual a:



   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

10. Calcula a área de um losango de lado 8 dm e que tem um ângulo de 130°.

11. Calcula a área de um triângulo ABC sabendo que:

    a) $a = 3{,}2$ cm; $b = 2{,}8$ cm e $\measuredangle C = 32°$
    b) $a = 8{,}4$ dm; $c = 10$ dm e $\measuredangle B = 115°$

12. Dado um $\triangle ABC$, $a = 4$ cm; $b = 6$ cm e $\measuredangle C = 120°$, calcula:

    a) a área do triângulo;
    b) o perímetro do $\triangle ABC$.

Actividades

13. Resolve as seguintes equações:

a) $\text{sen}\,(3x) = -\frac{1}{2}$

b) $\text{sen}\,(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,3x = \text{sen}\,x$

d) $\text{sen}\,(2x - \frac{\pi}{18}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sen}\,(3x) + \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 0$

14. Resolve as seguintes equações:

a) $\cos\,(5x + 20°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) = -1$

c) $\cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

d) $\cos\,(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

e) $\cos\,(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

15. Resolve as equações:

a) $\text{tg}\,(\frac{\pi}{3} + x) = 0$

b) $\text{cotg}^2\,(2x) = 3$

c) $3\,\text{tg}\,(2x) = -\sqrt{3}$

d) $\text{tg}\,(\frac{3x}{4}) = -1$

16. Resolve as seguintes equações trigonométricas:

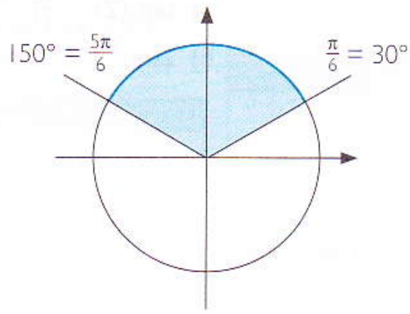
a) $\text{sen}\,(2x + 40°) = \frac{1}{2}$

b) $(\text{sen}x - \frac{\sqrt{3}}{2})[\cos(2x + 40°) - \frac{1}{2}] = 0$

c) $1 - 2\,\text{sen}^2\,(x + \frac{7\pi}{2}) = 0$

d) $\text{sen}\,2x - 2\cdot\text{sen}^2\,2x = 0$

17. Observa a figura seguinte.



Indica a solução das inequações:

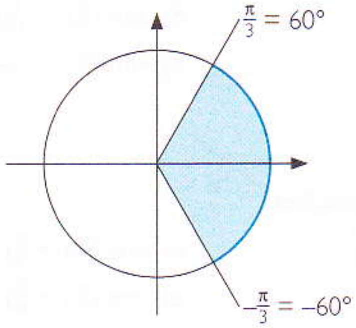
a) $\text{sen}\,x < \frac{1}{2}$

b) $\text{sen}\,2x > \frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,(2x - \frac{\pi}{2}) > \frac{1}{2}$

Actividades

18. Observa a figura seguinte.



Indica o conjunto-solução da inequação:

a) $\cos x < \frac{1}{2}$

b) $\cos (2x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$

c) $\cos (\frac{x}{3} - \pi) \geq \frac{1}{2}$

d) $0 < \cos x < \frac{1}{2}$

19. Resolve as inequações seguintes:

a) $\operatorname{tg} 2x > 1$

b) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} (x - \frac{\pi}{4}) > 1$

d) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$

20. Resolve as seguintes inequações:

a) $\operatorname{sen} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $0 < \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$

c) $0 < \cos x < 1$

d) $\cos (4x - \pi) \geq 0$

e) $\operatorname{tg} (x - \frac{\pi}{4}) < -1$

f) $\operatorname{tg} 3x > 1$

g) $\operatorname{sen} (2x - \frac{\pi}{4})$

h) $2\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 \geq 0$

Soluções

Unidade 1

1.a) $4 \notin \mathbb{N}$

b) Nem todos os números pares são primos.

c) $\pi \leq 3{,}2$

d) $4 \times 5 \neq 21$

2.a) V

b) $4 + 8 \geq 13$

c) F

3.a) 2 é um número par e primo.

b) 2 é um número par e é divisor de 4.

c) 2 não é divisor de 4 mas é um número par.

d) Não é verdade que 2 é número par e divisor e 4.

4.a) V b) V c) V

5.a)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

b)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim(P \Rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \vee \sim Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

7.1 a) Se Ana é inteligente, então ela tem boas notas.

b) Se Ana não é inteligente, então tem boas notas.

c) Se Ana tem boas notas, então ela é inteligente.

d) Ana é inteligente se e só se Ana tem boas notas.

e) Se Ana não é inteligente, então não tem boas notas.

8.a) $(\sim A)$ b) $(C \Rightarrow B)$

c) $(B \Rightarrow A)$ d) $A \wedge B$

9.a) F b) $Q \wedge P$

10.a)

P	$\sim P$	$\sim P \vee P$	$(\sim P \vee P) \wedge P$
V	F	V	V
F	V	V	F

Conclusão: $(\sim P \vee P) \wedge P = P$

b)

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$P \wedge Q$	$(\sim P \vee \sim Q) \wedge (P \wedge Q)$
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Conclusão: $(\sim P \vee \sim Q) \wedge (P \wedge Q) = F$

c)

P	Q	$\sim P$	$\sim P \wedge P$	$P \vee Q$	$(\sim P \wedge P) \vee (P \vee Q)$
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F

Conclusão: $(\sim P \wedge P) \vee (P \vee Q) = P \vee Q$

d)

P	$\sim P$	Q	R	$Q \wedge \sim P \wedge R$	$P \vee (Q \wedge \sim P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R)$
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F

Conclusão: $P \vee (Q \wedge \sim P \wedge R) = P \vee (Q \wedge R)$

11.a) V b) F c) V

12.a) F b) P

Soluções

13. A

14.a) ~A ∨ B
b) A ∧ ~B
c) ~(A ∧ B) ∧ C
d) ~(A ∧ B) ∨ ~C ou ~A ∨ ~B ∨ ~C
e) ~(A ∨ ~B) ∧ C ou ~A ∧ B ∧ C

16.a) Possível
b) Impossível
c) Universal
d) Possível
e) Possível
f) Possível

17.a) Qualquer que seja o número real tal que o seu quadrado é igual ao seu dobro.
b) Qualquer que seja o número natural tal que esse número é menor que o seu consecutivo.
c) Existe pelo menos um número natural tal que o seu dobro somado de um é um número ímpar.
d) Existe pelo menos um número real tal que esse número é igual ao seu inverso.

18.a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 2x$
b) $\forall n \in \mathbb{N}: n + 1 < n - 1$
c) $\forall n \in \mathbb{N}: 2n$ é par
d) $\forall n \in \mathbb{N}: n = \frac{1}{n}$

19.a) V
b) F
c) F
d) F
e) F
f) V

20.a) F
b) F
c) V
d) V

21.a) $\forall x \in \mathbb{R}: x = 0$
b) $\exists x \in \mathbb{Z}: x \notin \mathbb{Q}$
c) $\exists n \in \mathbb{N}: n + 1 \leq 0$
d) $\exists x \in \mathbb{Z}_0^+: x < 0$ e $x \notin \mathbb{N}$
e) $\exists x \in \mathbb{R}: 1 \geq x$ ou $x > 5$
f) $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 2$ e $x \neq 5$

Unidade 2

1.a) Expressão algébrica racional fraccionária
b) Expressão algébrica racional inteira
c) Expressão algébrica racional fraccionária
d) Expressão algébrica irracional de índice par
e) Expressão algébrica racional inteira
f) Expressão algébrica irracional

2.a) 7
b) 6°
c) $x^6 + 5x^3 - 2x^2 + 7$

3. $a = -1; b = -3$

4. $m = 1; n = -1; r = 0$

5.a) $x^4 + \frac{7x^2}{2} - 4$
b) $\frac{x^4}{2} + 3x^3 - \frac{13}{2}x^2 - x - 4$
c) $2x^4 - 6x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 6$
d) $x^4 + 4x^2 - 9$

6.a) $-2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 3$
b) $2x^5 - 8x^4 + x^3 + 6x + 9$
c) $-x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 3$

7.a) $x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 2x - 15$
b) $2x^2 - 3x$
c) $8x^3 - 14x^2 + 3x$

8.a) $3x^3 - 14x^2 + 14x - 2$
b) $16x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 3x$
c) $-2x^2 - 16x + 3$

9.a) $Q(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1; R = 0$
b) $Q(x) = 3x + 1;\ R = 6$
c) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 12;\ R = 25$
d) $Q(x) = 8x^2 - 4x;\ R = -1$

10.a) −48
b) $\frac{21}{8}$
c) −3
d) 0

11.a) $Q(x) = x^2 + x - 1; R(x) = 0$
b) $Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 11x + 22; R(x) = 41$
c) $Q(x) = x - \frac{2}{3}; R(x) = 5x^2 + \frac{2}{3}x - 1$

12. $Q(x) = -x^3 + x^2 - x + 2;\ R = 1$

13.a) $Q(x) = 2x^2 + x + \frac{1}{2};\ R = -\frac{3}{2}$
b) $Q(x) = 2x - \frac{7}{4};\ R = \frac{19}{4}$
c) $Q(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{14}{27};\ R = \frac{5}{2}$

14.a) $Q(x) = x - 5; R(x) = -11x + 7$
b) Impossível
c) $Q(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 8; R(x) = -16x + 4$

15.a) $Q(x) = x + 3$
b) $Q(x) = 5x - 12$
c) $Q(x) = x$

Soluções

16.a) $Q(x) = 3x + 1; R = 6$
b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 12; R = 25$
c) $Q(x) = 8x^2 - 4x; R = -1$
d) $Q(x) = 2x^2 + x + \frac{1}{2}; R = -\frac{9}{2}$
e) $Q(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{14}{27}; R = \frac{55}{27}$
f) $Q(x) = 2x - \frac{7}{4}; R = \frac{19}{4}$

17.a) $P(-2) \neq 0$, logo $P(x)$ não é divisível por $x + 2$
b) $P(x) = \frac{7}{2}x^3 + 3x^2 - 2x - 12$

18. $a = -2; b = 1$

19. $x(x + 1)(2x - 3)$

20. $(3x - 1)(x - 2)$

21.a) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$
b) $(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
c) $(x - 2)(x^2 + 1)$
d) $4(x + 1)^3(x - \frac{1}{2})^2$

22.a) $(10 + 1)(10 - 1) = 99$
b) $(2 + 3)(4 - 6 + 9) = 35$
c) $5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 4^2 = 81$
d) $(5 - 4)(25 + 20 + 16) = 61$

23.a) $(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$ b) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
c) $(\frac{1}{3} + x)(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - x + x^2)$

24. $a = 1; b = -1; r = 0$

25.a) $P(-1) = 0$
b) $P(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 9)$

26. $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$

27.a) $x = 2; x = -5$
b) $P(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 5)$

28.a) $a = -11; b = 10$
b) $P(x) = (x - 1)(x - 2)(2x + 5)$

29.a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{3, 4\}$ b) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-5, 1\}$
c) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -2, \frac{1}{2}, 2\}$

30.a) $\frac{(2x - 1)}{(x^2 + x + 1)}, x \neq 1$ b) $\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - x}$ se $x \neq 0; x \neq 1$
c) $\frac{1}{x + \sqrt{3}}, x \neq \pm\sqrt{3}$ d) $\frac{-(x + 5)}{2x + 8}, x \neq \pm 4$

31.a) $\frac{x + 1}{2}, a \neq 0$ b) $\frac{x^2 + 2x}{x - 1}$ se $x \neq 1$
c) $\frac{1}{x + 1}$ se $x \neq -1$

32.a) $\frac{-5}{3x}$ b) $\frac{x - 4}{x(x + 2)}$
c) $\frac{x + 2}{x - 5}$ d) $\frac{12}{x^2 - x}$
e) $\frac{(x + a)^2}{(x - a)(x^2 + a^2)}$ f) $\frac{1}{(x - 1)^2}$

33.a) $x \leq 3$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) $x \geq 5$
d) $x > 5$ e) $x \neq 0$

34.a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 - 3}$ d) $\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x - 1}$
e) $\frac{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{2})}{23}$ f) $\frac{x(\sqrt{1 - 4x} - 2)}{4x - 3}$
g) $\frac{(x + 2)(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x - 2}$ h) $\frac{3(\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{8 - x}$

35.a) $x \in \mathbb{R} / \{\pm 1; -8\}$ b) $x \in \mathbb{R}$
c) $x \geq -2$ d) $x > 1$
e) $x < 2$ f) $x \leq 5 \wedge x \neq -3$

36.a) $\frac{3x^2 - x}{2x^2 - 2}$ com $x \neq \pm 1$
b) $\frac{2x^3 - x^2 + 18x - 45}{2x^2(x - 3)^2}$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$
c) $\frac{x^2 - x}{x^2 + x}$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$
d) $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
e) $\frac{x + 2}{x^2}$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$
f) $x^2 - 4$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
g) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 5}$ com $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 3\}$
h) $\frac{x - 5}{x^2 + 9x + 20}$ com $x \in \mathbb{R}\setminus \{-5, -4, 1\}$

37.a) $\{1, \frac{1}{4}\}$ b) $\{-\frac{16}{6}, 3\}$ c) $\{-3, 4\}$
d) $\{\ \}$ e) $\{\frac{1}{2}, 1\}$

38. 102

Soluções

39.a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{33}}{2}$ d) $\frac{29}{4}$

40. $k \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$
41. $k = -b$
42. $k = \pm\frac{1}{3}$
43. $c > 0$
44. $a > -\frac{1}{8}$
45. $n = -1$
46. $k < -\frac{13}{12}$

47.a) $\{0\}$ b) $\{2\}$ c) $\{-5\}$
d) $\{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ e) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$

48.a) $\{-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\}$ b) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
c) $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ d) Equação impossível
e) $\{\sqrt[5]{-3}; \sqrt[5]{4}\}$ f) $\{\frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}\}$

49.a) $\{31 + \frac{\sqrt{97}}{18}; 31 - \frac{\sqrt{97}}{18}\}$ b) $\{2; 3\}$
c) $\{-216; 27\}$ d) $\{4\}$

50.a) $\{x \in \mathbb{R}: x < -3 \vee -1 < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \vee \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R}: x > 0 \vee 0 < x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R}: x < -3 \vee x > 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R}: x < \frac{5}{2} \vee x > \frac{3}{2}\}$

51.a) $(4, -5)$ b) $(2, -1)$ c) $(1, -1)$
d) (impossível) e) $(6, 4)$

52.a) $\{12, 0, 6\}$ b) $\{7, -3, 1\}$ c) $\{8, 0, -2\}$
d) $\{5, -1, 0\}$ e) $\{0, 1, -1\}$

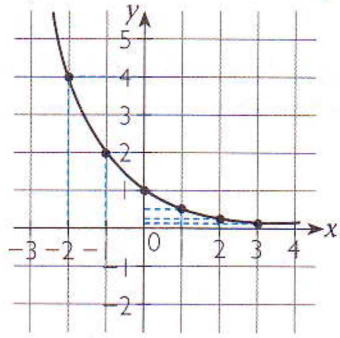
53.a) $\{1, 1, 1\}$ b) $\{2, 3, -1\}$ c) $\{2, 1, 0\}$ d) $\{3, 5, 0\}$

54.a) $(1, 1, 1)$ – pelo método de substituição
b) $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -1)$ – pelo método de adição ordenada
c) $(5, 2, 1)$ – pelo método de Cramer
d) $(1, 2, 0)$ – pelo método misto

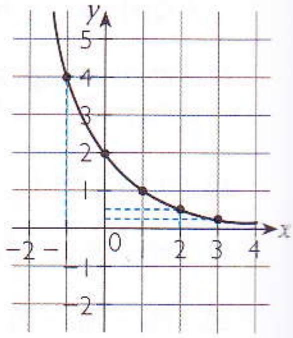
Unidade 3

1. $g(x) \Rightarrow$ A
$h(x) \Rightarrow$ B
$f(x) \Rightarrow$ C
$m(x) \Rightarrow$ D

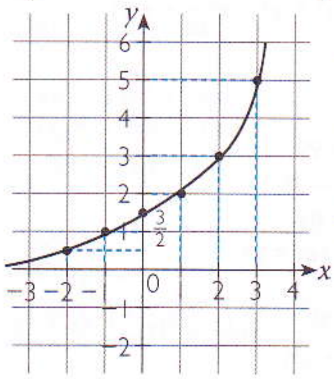
2.a)



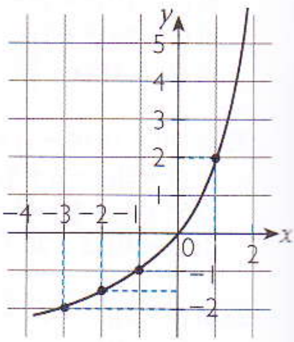
b)



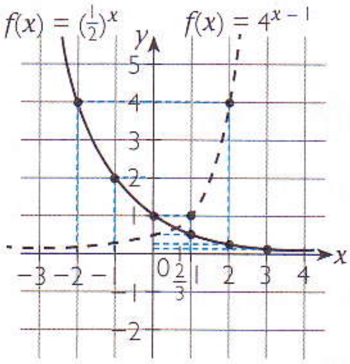
c)



d)



3.a) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ $f(x) = 4^{x-1}$ b) $\{2\}$



4.a) $\{1, 2\}$ b) $\{1\}$ c) $\{-1, 1\}$
d) $\{1\}$ e) $\{2, 3\}$

5.a) $\{2\}$ b) $\{3\}$ c) $\{1, 2\}$
d) $\{\frac{5}{3}\}$ e) $\{0\}$ f) $\{0\}$

Soluções

6.a) $\{-1, 1\}$ b) $\{\frac{10}{7}\}$ c) $\{-4\}$ d) $\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\}$

7.a) $\{\frac{3}{2}\}$ b) $\{3\}$ c) $\{1\}$

8.a) $\{2\}$ b) $\{-2\}$ c) $\{1\}$ d) $\{3\}$
e) $\{1, 3\}$ f) $\{1, 2\}$

9.a) $\{2\}$ b) $\{\frac{7}{3}\}$ c) $\{2\}$
d) $\{0, 3\}$ e) $\{\frac{1}{2}\}$ f) $\{-1, 1\}$

10. c)

11. c)

12. b)

13. c)

14.a) $\{x < -3\}$ b) $\{x \leq \frac{13}{9}\}$
c) $\{x > -1\}$ d) $\{x < 2\}$
e) $\{-4x \leq 5x \leq 6\}$ f) $\{\ \}$
g) $\{x < -1 \vee x > 1\}$

15.a) $x > 0$

16.a) $x \in \mathbb{R}$

17.a) $\{x > 2\}$ b) $\{x \leq -\frac{5}{4}\}$

18.a) $\{x \leq -\frac{5}{4}\}$ b) $\{x \geq \frac{1}{2}\}$ c) $\{x \leq -1\}$

19.a) $\{\ \}$ b) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 2\}$
c) $\mathbb{R}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$

20. a)

21. a)

22.a) $\{0 \leq x \leq 1\}$ b) $\{x \leq 0 \vee x \geq 1\}$
c) $\{x \leq -1 \vee x \geq 0\}$ d) $\{x \leq -2 \vee x \geq -1\}$
e) $\{0 \leq x \leq 5\}$

23.a) $\{3\}$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$
e) $\{2\}$ f) $\{3\}$ g) $\{3, 11\}$

Unidade 4

1.a) 1,7242 b) −0,2510 c) 2,9661 d) 2,4014

2.a) $c = -1$ b) $c = -3$ c) $c = -4$ d) $c = -2$

3.a) 0,6990 b) 1,6990 c) 2,4942 d) 2,9494

4.a) −1,8239 b) −0,3010 c) −1,5686 d) −3,0846

5.a) {2,2175} b) {1,440} c) {1,6402} d) {6,7307}

6.a) 2668 b) 354,1 c) 2,0960
d) 15 e) 2899

7.a) {7,3892} b) {0,0329} c) {53,53}

8.a) 0,005009 b) 0,004 c) 0,007509 d) 0,05456

9.a) 3,14 b) 1,79 c) 5,13
d) 2,20 e) 1074

10.a) −3 + 0,7782
b) −4 + 0,4771
c) −3 + 1,3979

11.a) {0,0050} b) {2900} c) {0,0004} d) {15}

12.a) $\{\ \}$ b) $\{3 + \sqrt{17}\}$ c) $\{1\}$ d) $\{1\}$
e) $\{4\}$ f) $\{6\}$ g) $\{1\}$ h) $\{\frac{9}{2}\}$

13.a) $\{\ \}$ b) $\{\sqrt{2}; 4^{\frac{1}{3}}\}$ c) $\{3^{\frac{1}{3}}; \frac{1}{3}\}$
d) $\{2; 4\}$ e) $\{3; 27\}$ f) $\{36; 216\}$

14.a) $\{\sqrt[7]{16}\}$ b) $\left\{\frac{(-1+\sqrt{73})}{3}\right\}$ c) $\{512\}$
d) $\{-1, 0\}$ e) $\{4, \sqrt[3]{4}\}$ f) $\{0{,}01, 0{,}001\}$

15.a) $\{4{,}3; 3{,}4\}$ b) $\{5{,}20; 20{,}5\}$
c) $\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$ d) $\{2, \frac{1}{2}\}$

16.a) $\frac{14}{5} < x < 3$ b) $x < \log_5 3$
c) $x > 4$ d) $-1 < x < 1$

17.a) $\{x \in \mathbb{R}: 3 < x < 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{47}{15}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R}: x > 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x < -7 \vee x > 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq -1 \vee x \geq \frac{1}{2}\}$ f) $\{x \in \mathbb{R}: \frac{5}{2} \leq x \leq 2\}$

Soluções

18. $r = 4{,}4048$ cm

19. $r = 3{,}9396$ cm

20. $t = 8{,}39$ s

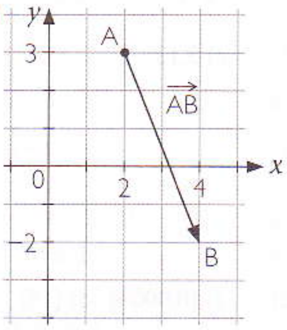
21. $t = 1{,}004$ s

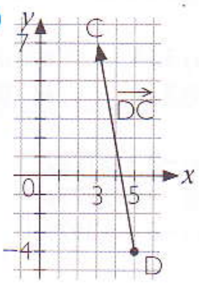
22. $y = 7430$ meticais

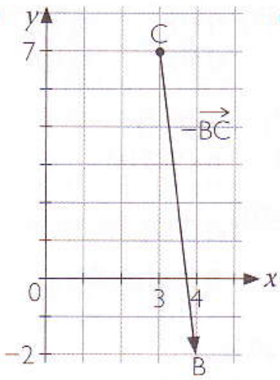
21. $\frac{M_1}{M_2} = 100$

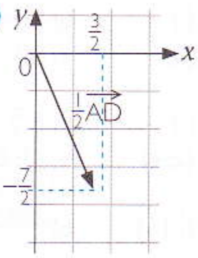
Unidade 5

1.a) $\overrightarrow{AQ}$ b) $\overrightarrow{HJ}$ c) $\overrightarrow{AK}$
d) $\overrightarrow{NR}$ e) $\overrightarrow{O}$ f) $\overrightarrow{O}$

2.a)


b)


c)


d)


3. A extremidade do vector será $N(8, 6)$.

4. O ponto inicial do vector será $A(-3, 5)$.

5.a) $(6, -2)$ b) $(\frac{27}{2}, -3)$ c) $(-3, -5)$

6.a) $|\vec{a}| = \sqrt{13}$ b) $\vec{u_c} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

7.a) 2 b) 1 c) $\frac{5}{4}$

8.a) $x - 2y + 10 = 0$ b) $3x - 4y - 6 = 0$

9. $5x - 6y - 8 = 0$

10. $3x + 2y = 0$

11. $x + 6y + 16 = 0$

12.a) $d(\mathrm{AB}) = \sqrt{26}$ b) $d(\mathrm{OP}) = 5$

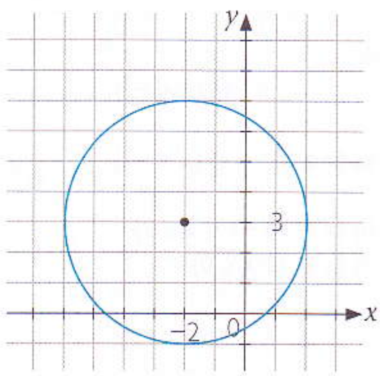
13. $\mathrm{P}(\frac{4}{5}, -\frac{13}{5})$

14. $\mathrm{M}(-\frac{3}{2}, 1)$

15. $d(\mathrm{P}, r) = \frac{11}{5}$

16. Altura traçada do vértice A é $-\frac{40}{\sqrt{58}}$; a área do triângulo é 20 (unidades de área).

17. A equação da circunferência é $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ ou $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.



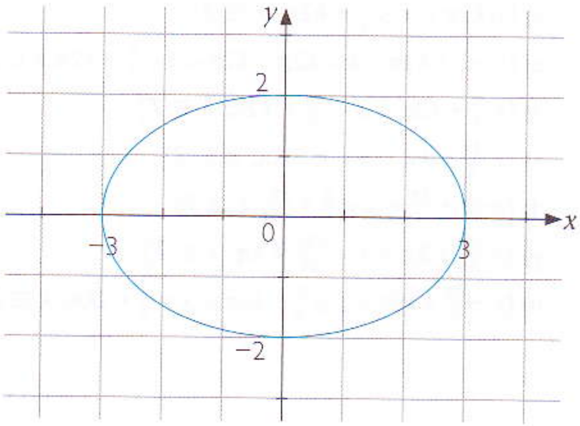
18. O centro é $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$; o raio é $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

19. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 36 = 0$

Soluções

21. A equação será $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ou $4x^2 + 9y^2 = 0$.



22. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$ ou $x^2 + 4y^2 = 52$

23. $F_1 = (0, -2), F_2 = (0, 2)$

24. $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$

25. Centro $(-2, 2)$; focos: $F_1 = (-2, 2 - \sqrt{15})$ e $F_2 = (-2, 2 + \sqrt{15})$

26.a) $A_1(-\sqrt{7}, 0)$ e $A_2(\sqrt{7}, 0)$;
b) $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$

27. $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

28.a) $(1, -2)$;
b) $(-3, -2), (5, -2)$;
c) $(-4, -2), (6, -2)$;
d) $y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$.

Unidade 6

1.a) O contradomínio da função é $y \in [1; 5]$.
b) Os máximos da função são $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
c) Os mínimos da função são $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
d) A ordenada na origem é $y = 3$.

2.a) O contradomínio da função é $y \in [0; 2]$.
b) O contradomínio da função é $y \in [2; 3]$.

3.a) O contradomínio da função é $y \in [2; 4]$.
b) A ordenada na origem da função é $y = 2$.
c) máximo: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
mínimo: $x = \frac{k2\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

4.a) $D: x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
b) $D: x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

5.a) $\{6\}$
c) $D': y \in [2; 4]$
d) $m(x + \frac{\pi}{4}) = 3 - \text{sen}\, 2x$

7.a) $y = 2{,}37; x = 2{,}12$
c) $x = 3$
b) $x = 3{,}85$
d) $x = 100\sqrt{2} = 141{,}2$

8. Opção d)

9. Opção a)

10. Área = 49 dm^2

11.a) Área = 2,374 cm^2
b) Área = 38,06 dm^2

12.a) Área = 10,38 cm^2
b) Perímetro = 18,71 cm

13.a) $x = -10° + k \cdot 120° \vee x = 70° + k \cdot 120°; k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
c) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{7}{72}\pi + k\pi \vee x = \frac{-7\pi}{72} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
e) $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{k2\pi}{3} \vee x = -\frac{7}{18} + \frac{k2\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$

14.a) $\{x: 23° + k72°; 41° + k72°\ ; k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{x: \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{x: k\pi \vee -\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{x: \frac{7\pi}{12} + k\pi; -\frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\{x: \frac{\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

15.a) $\{x: -\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{x: \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{x: \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{x: \pi + \frac{4k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$

16.a) $\{x: 5° + k \cdot 180° \vee x = -5° + k \cdot 180°\ ; k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{x: 60° + k \cdot 360°; 10° + k \cdot 180°; 120° + k \cdot 360°; 310° + k \cdot 180°; k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{x: -\frac{13\pi}{4} + k2\pi; -\frac{15\pi}{4} + k2\pi\ ; k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\{x: \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

17.a) $\{x: \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{x: \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{x: \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Soluções

18.a) $\{x: \frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x: \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x: 2\pi + 6k\pi \leq x \leq 4\pi + 6k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

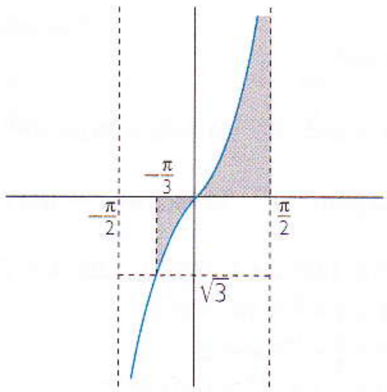
d) $\{x: \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$

19.a) $\{x: \frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x: \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x: \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x: -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$



20.a) $\{x: \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x: k2\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x: -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi \vee k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x: \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{8} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{x: \frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

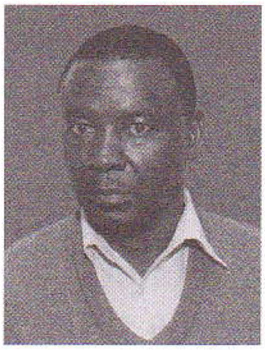
f) $\{x: \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$

g) $\{x: \frac{5\pi}{24} + k\pi < x < \frac{13\pi}{24} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

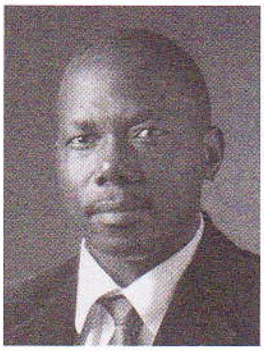
h) $\{x: -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \geq x \geq \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Ficha técnica
Título: Pré-Universitário – Matemática 11
Editor: Longman Moçambique
Impressão e acabamentos: Creda Communications
R9457

Autores:



José Pedro Vuma
Natural do distrito de Homoíne, na província de Inhambane, licenciou-se em ensino de Matemática e de Física pela Universidade Pedagógica (UP) em 1995. Leccionou na Escola Secundária de Cambine, na Escola Secundária Emília Daússe, na Província de Inhambane; na Escola Secundária Francisco Manyanga e na Escola Particular Isaac Newton, em Maputo.
Actualmente é Instrutor de Metodologia do Ensino de Matemática no Instituto de Formação de Professores (IFP) da Munhuana, Cidade de Maputo, e lecciona no Colégio Kitabu – Cidade de Maputo.



Marcos Cherinda
Natural de Maputo, formou-se em 1981 como professor de Matemática e Física na Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane. Em 1989, concluiu, na Alemanha, o «Diplom Lehrer» em Matemática. Em 2002, concluiu o doutoramento (Ph.D.) em Educação Matemática pela Universidade de Wittwatersrand, em Joanesburgo, na África do Sul.
Leccionou na Escola Secundária de Nampula, tendo colaborado com a Direcção Provincial de Educação e Cultura em Nampula.
Actualmente, é docente de Matemática na Universidade Pedagógica, onde também exerce a função de Director da Faculdade de Ciências Naturais e Matemática.
É membro de várias associações académicas, destacando-se a sua prestação como membro do *Research Capacity Building Committee* (RCBC) da *Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (SAARMSTE).
Possui um interesse especial pela geometria e etnomatemática, uma nova área na investigação matemática e cultural, na qual trabalha com o Professor Paulus Gerdes. É co-autor do livro *Teoremas Famosos da Geometria*, tendo já publicado vários artigos sobre educação matemática.

Longman Moçambique, Lda.
Avenida 24 de Julho, n.° 776
Maputo, Moçambique

Registado no INLD sob o número: 6154/RLINLD/2009

SÍMBOLOS DA REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

Bandeira

Emblema

Hino Nacional

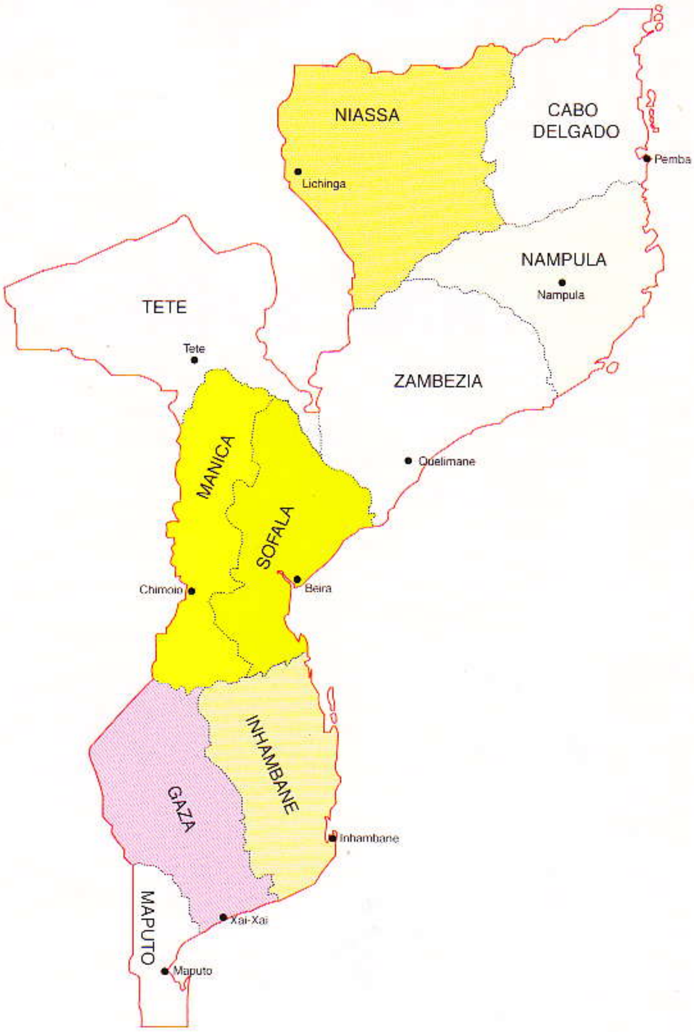
Pátria Amada

Na memória de África e do mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando no chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique.
Nenhum tirano nos irá escravizar.



ISBN 978-0-636-09705-6